F227

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Válogatott feladatok a kombinatorikus geometriából

(Csiszár Mária)

A Pell-egyenlet

(Szoldatics József)

Miért nem kérdezünk vissza?

(Tóth Mariann)

Új tankönyv a 2005/2006-os tanévre

(Vincze István)

XIII. ÉVFOLYAM 2005 1

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1450 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Válogatott feladatok a kombinatorikus geometriából
Csiszár Mária
tanár, Zalaegerszeg

A Pell-egyenlet
Szoldatics József
tanár, Kapuvár

Miért nem kérdezünk vissza?
Tóth Mariann
tanár, Debrecen

Új tankönyv a 2005/2006-os tanévre
Sokszínű matematika tankönyvcsalád
Középiskolás matematika-tankönyvek
9-12. évfolyam
Vincze István
gimnáziumi tanár, Szeged

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Csiszár Mária

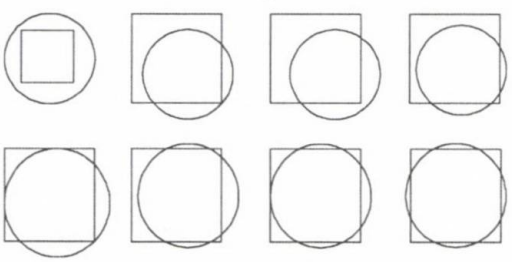
Válogatott feladatok a kombinatorikus geometriából

Hány részre osztja az egyenest 1, 2, 3, ... pont?

Pontok száma	Részek száma
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
...	...
n	$n+1$

Hány részre bontja fel a síkot egy négyzet és egy körvonal?

Legkevesebb részt akkor kapunk, ha a körvonal és a négyzet határvonala nem metszi egymást. Ekkor 3 tartomány jön létre. A legtöbb rész akkor keletkezik, ha a körvonal minden négyzetoldalt két belső pontban metsz. Ekkor 10 tartomány jön létre. A síkrészek száma lehet 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ami meg is valósítható.



Hány részre bonthatja a kört 1, 2, 3, 4, 5 húrja?

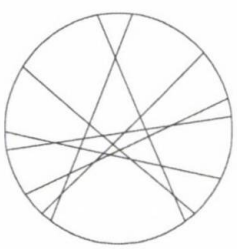
Húrok száma	Tartományok száma
1	2
2	3, 4
3	4, 5, 6, 7
4	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
5	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

n darab húr esetén a lehetséges tartományszámok $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $1+\frac{n(n+1)}{2}$, az egyes eseteknek megfelelő konstrukciók elkészítését az olvasóra bízzuk.

Legfeljebb hány részre (tartományra) bonthatja fel a körlapot 7 húrja?

A legtöbb rész akkor jön létre, ha bármelyik két húr metszi egymást a kör belsejében és egyetlen metszésponton sem megy át három húr. Két egymást metsző húr négy részre osztja a körlapot. A harmadik húr maximálisan három előző tartományt vág két részre, így hárommal nő a részek száma. Egy új húr felvételével mindig annyi új tartomány keletkezik, mint ahány tartományt az új húr kettévág, vagyis ahány részre az új húrt az előzőleg elhelyezett húrokkal alkotott metszéspontjai bontják.

Húrok száma	Részek száma
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29



Észrevehető, hogy egy új húr alkalmas felvétele az előző tartományok számát rendre 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 7-tel növeli. Hét húr a kört maximálisan

29 tartományra bonthatja, ami meg is valósítható, ezt látjuk az ábrán.

Legfeljebb hány tartományra bontja a síkot 1, 2, 3, 4, ..., *n* egyenes?

Az előző feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy a részek száma rendre

Egyenesek	Tartományok
1	2
2	$2+2$
3	$2+2+3$
4	$2+2+3+4$
5	$2+2+3+4+5$
...	...
n	$1+\frac{n(n+1)}{2}$

Maximális számú tartomány akkor adódik, ha az egyenesek páronként metszik egymást és nincs közöttük három olyan, amely egy pontra illeszkedik. Az is felfedeztethető, hogy a keletkezett síkrészek között n darab egyenes esetén $2n$ darab a nem korlátosok száma. Ennek indoklására vegyünk fel egy akkora kört, amely belsejében tartalmazza az összes metszéspontot. Ennek a körnek a határvonalát mindegyik egyenes két pontban metszi, így a körvonalon levő $2n$ db pont a körvonalat $2n$ db ívre bontja, amelyek mindegyike egy-egy végtelenbe nyúló részt vág két részre. Mivel a körlemezben levő részek korlátosak, ezért a nem korlátos részek száma valóban $2n$. Ebből az is következik, hogy a korlátos részek száma $1+\frac{n\cdot(n+1)}{2}-2n$.

Legfeljebb hány részre bontja a síkot 1, 2, 3, 4 , ..., *n* kör?

Körök száma	Tartományok száma
1	2
2	4
3	8
4	14
5	22
...	...
n	$2+n(n-1)$

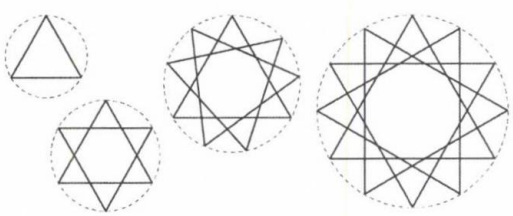
A síkrészek száma akkor lesz maximális, ha bármely két kör metszi egymást. Észrevehető, hogy ha a körök számát egyesével növeljük, akkor a síkrészek száma rendre 2, 4, 6, 8, ..., $2n$-nel nő. Ennek indoklása: Minden új kör határvonala két új pontban metszi az előzőleg felvett körök mindegyikét. A k.-nak felvett kör határvonalán $2(k-1)$ új metszéspont keletkezik, melyek $2(k-1)$ egymáshoz csatlakozó körívre bontják fel az új körvonalat. Ezen ívek mindegyike kettévág egy már meglevő tartományt, így $2(k-1)$-gyel növekszik az előzőleg már meglevő tartományok száma. Tehát az n kör a síkot legfeljebb az alábbi számú tartományra bontja:

$$2+1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+\ldots+(n-1)\cdot 2=$$
$$=2+(n-1)n.$$

Legfeljebb hány részre bontja a síkot 1, 2, 3, ..., *n* háromszög?

Háromszögek száma	Tartományok száma
1	2
2	8
3	20
4	38
...	...
n	$2+3n(n-1)$

Az első 4 eset látható az alábbi ábrákon:



Egy háromszög két tartományra bontja a síkot. Két háromszög esetén az egyik háromszög minden oldala a másik háromszög két oldalát metszi, a harmadikat nem metszheti belső pontban, így maximum hat közös pontjuk lehet. A második háromszög felvétele hattal növeli a tartományok számát.

Három háromszög esetén a harmadik háromszög minden oldala a másik két háromszögnek két-két oldalát metszi. Ez $3\cdot 4=12$-vel növeli az eddigi metszéspontok és egyúttal a tartományok számát.

Négy háromszög esetén a negyedik háromszög minden oldala a már felvett három háromszögnek két-két oldalát metszi. Ez $3 \cdot 6 = 18$-cal növeli az eddigi metszéspontok és egyúttal a tartományok számát.
Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy n darab háromszög maximum

$$2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + 3 \cdot 2(n-1) =$$
$$= 2 + 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) = 2 + 3(n-1)n$$

darab tartományra bontja a síkot.
Ez meg is valósítható, pl. a következőképpen: a háromszögek csúcsait egy szabályos $3n$-szög csúcsaiban vesszük fel, úgy, hogy hármasával alkalmasan választva a csúcsokat n darab szabályos háromszöget kapjunk.

Legfeljebb hány részre bontja a síkot 1, 2, 3, ..., n darab négyzet?

Négyzetek száma	Tartományok száma
1	2
2	10
3	26
...	...
n	$2 + 4(n-1)n$

Alkalmazható az előző feladat megoldásának gondolatmenete.
Két négyzet esetén az egyik négyzet minden oldala a másik négyzet két szomszédos oldalát metszi, ennél több oldalt nem metszhet (belső pontban). A második négyzet felvétele így maximálisan $4 \cdot 2 = 8$-cal növeli a tartományok számát.
Három négyzet esetén a harmadik négyzet minden oldala a másik két négyzet két-két oldalát metszi. A harmadik négyzet felvétele maximálisan $4 \cdot 4 = 16$-tal növeli a tartományok számát... stb.
Végül az n. négyzet felvétele maximálisan $4 \cdot 2(n-1)$-gyel növeli az előzőleg már meglevő maximális tartományszámot. Így n darab négyzet esetén a tartományok maximális száma:

$$2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + \ldots + 4 \cdot 2(n-1) =$$
$$= 2 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n - 1) =$$
$$= 2 + 4(n-1)n.$$

Ez meg is valósítható, pl. ha az n darab négyzet csúcsait egy szabályos $4n$-szög csúcsaiban vesszük fel, négyesével alkalmasan választva a csúcsokat.

Hány részre bontják a teret a kocka lapsíkjai?

Két párhuzamos lapsík három részre bontja a teret. Az erre merőleges egyik lapsíkpár síkjai három-három tartományt vágnak ketté, így a két lapsíkpár kilenc tartományt hoz létre. A harmadik lapsíkpár mindkét síkja kilenc tartományba vág bele, így a kocka lapsíkjai összesen $3 \cdot 9 = 27$ részre bontják a teret.

Hány részre bonthatja a teret 1, 2, 3 sík?

1 sík nyilván 2 részre bontja a teret.
2 sík 3 vagy 4 részre bontja a teret, aszerint, hogy a két sík párhuzamos egymással vagy metszi egymást.
3 sík esetén 4, 6, 7 vagy 8 tartomány keletkezik. (5 nem keletkezhet!) a három sík kölcsönös helyzetétől függően.
Ha a 3 sík párhuzamos egymással, nyilvánvalóan 4 térrész keletkezik.
Ha 2 sík párhuzamos egymással, a 3. pedig metszi őket, akkor a 3. sík a két párhuzamos sík által létrehozott 3 térrész mindegyikét kettévágja, ezért 3-ról 6-ra nő a térrészek száma.
Ha a 3 sík közül semelyik kettő sem párhuzamos egymással, azaz bármely kettő metszi egymást, akkor először két síkot tekintve 4 térrész keletkezik. A harmadik sík felvételére három lényegesen különböző lehetőség van: illeszkedik a két sík metszésvonalára, vagy párhuzamos a metszésvonallal vagy metszi azt.
Ha a 3. sík illeszkedik a két sík metszésvonalára, akkor a már meglevő 4 térrész közül kettőt vág ketté, így összesen 6 tartomány keletkezik.
Ha a 3. sík párhuzamos a két sík metszésvonalával, akkor ez a sík három előbbi térrészt vág ketté, így a térrészek száma 4-ről 7-re nő. (A kettévágott tartományok száma azért 3, mert a harmadik síkot a másik két sík két párhuzamos egyenesben metszi, melyek a harmadik síkon 3 síktartományt hoznak létre és ezek mindegyike kettévág egy térrészt.)
Ha a 3. sík metszi a két sík metszésvonalát, vagyis a 3 síknak pontosan egy közös pontja van,

akkor a 3. síkot a másik két sík két metsző egyenesben metszi, ami 4 síktartományt hoz létre a 3. síkon, és ezek mindegyike kettévág egy térrészt. Így a térrészek száma 4-gyel nő, tehát 8 lesz.

Síkok száma	Tartományok száma
1	2
2	3, 4
3	4, 6, 7, 8

Hány részre bontja a teret 3, 4, 5, 6, ..., *n* darab sík, ha pontosan egy közös pontjuk van?

Az előző feladat megoldása során már láttuk, hogy 3 megfelelő sík esetén a térrészek száma 8. Vegyük fel a 4. síkot a feladat feltételeinek megfelelően. Ezt az új síkot a már felvett három sík 3 egy pontra illeszkedő egyenesben metszi, a közös pont a síkok közös pontja. Ezek a metszésvonalak az új síkot $2 \cdot 3 = 6$ tartományra bontják. Ezen síktartományok mindegyike kettévág egy már meglevő térrészt, ezért a 4. sík felvétele a térrészek számát 6-tal növeli. Az eljárást tovább folytatva kapjuk, hogy az n. sík hozzávétele az előzőekben felvett $n-1$ síkhoz $2(n-1)$-gyel növeli a térrészek számát. Így n darab ($n \geq 3$), a feltételeknek megfelelő sík a teret

$$8 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2(n-1) =$$
$$= 2 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) = 2 + n(n-1)$$

részre bontja.

Hány részre bontják a teret a tetraéder lapsíkjai?

Az előző feladatokból már ismert, hogy a tetraéder 3 lapsíkja 8 részre bontja a teret. Vegyük hozzá ezekhez a síkokhoz a 4. lapsíkot. Ezt az új síkot a másik 3 lapsík 3 olyan egyenesben metszi, amelyek páronként metszik egymást, de nincs közös pontjuk. A 3 metszésvonal a 4. lapsíkot 7 tartományra bontja, melyek mindegyike kettévág egy már meglevő térrészt, így 7-tel növekszik a már meglevő térrészek száma. Tehát a tetraéder lapsíkjai összesen 15 részre bontják a teret.

Egy kockát síkokkal 25 részre akarunk szétvágni. Legalább hány sík szükséges ehhez?

Az előző feladat eredménye alapján kimondhatjuk, hogy 4 sík felvételével a kocka legfeljebb 15 részre darabolható. Vegyünk fel 4 síkot egy tetraéder lapsíkjaiként; ezek 15 tartományra bontják a teret, majd vegyünk fel egy 5. síkot úgy, hogy az ne legyen egyik síkkal sem párhuzamos, ne illeszkedjen semelyik két sík metszésvonalára, továbbra se haladjon át a tér egyetlen pontján sem 3-nál több sík és a metszésvonalak között se legyenek párhuzamosak. Ezt az új síkot a többi síkkal alkotott 4 metszésvonal 11 tartományra bontja, melyek kettévágják a tér 11 tartományát, így az 5. sík felvételével legfeljebb $15 + 11 = 26$ részre darabolható a kocka. Tehát legalább 5 sík szükséges a kocka 25 részre darabolásához.

Legfeljebb hány részre osztja a teret 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., *n* sík?

Tekintsünk n darab olyan síkot, melyek között, sem a metszésvonalaik között nincsenek párhuzamosak, továbbá semelyik 3 síknak nincs közös egyenese és semelyik 4-nek nincs közös pontja. Ekkor az n. síkot a többi sík $n-1$ darab olyan egyenesben metszi, amelyek általános helyzetűek, azaz bármely kettő metszi egymást, és semelyik háromnak nincs közös pontja. Ezek az egyenesek az 5. feladat szerint az n. síkot $1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$ darab tartományra bontják. A síktartományok mindegyike kettévág egy térrészt, tehát ennyi új térrész keletkezik. Az összes térrész számát megkapjuk, ha az $n-1$ darab sík által meghatározott térrészek számához (t_{n-1}-hez) hozzáadjuk az új térrészek számát (s_{n-1}-et). Tehát: $t_n = t_{n-1} + s_{n-1}$.

Eddigi eredményeinket táblázatba foglalva:

n	t_{n-1}	s_{n-1}	t_n
1	1	1	2
2	2	2	4
3	4	4	8
4	8	7	15
5	15	11	26
6	26	16	42
7	42	22	64
...	...	...	...

Írjuk fel a $t_n = t_{n-1} + s_{n-1}$ összeget $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ értékekre:

$$t_1 = t_0 + s_0$$
$$t_2 = t_1 + s_1$$
$$t_3 = t_2 + s_2$$
$$\ldots$$
$$t_n = t_{n-1} + s_{n-1}$$

Adjuk össze a felírt egyenlőségek megfelelő oldalait!

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n =$$
$$= t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}$$

Innen $t_n = 2 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{n-1}$ adódik, ahonnan

$$t_n = 2 + \left(1 + \frac{1 \cdot 2}{2}\right) + \left(1 + \frac{2 \cdot 3}{2}\right) +$$
$$+ \left(1 + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{(n-1)n}{2}\right).$$

Kihasználva, hogy $\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$, az összeg így alakul:

$$t_n = 2 + (n-1) \cdot 1 + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2}.$$

Most használjuk ki a következő két összefüggést:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

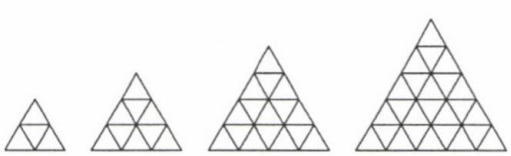
és

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Kapjuk, hogy

$$t_n = 2 + n - 1 + \binom{n+1}{3} =$$
$$= 2 + n - 1 + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

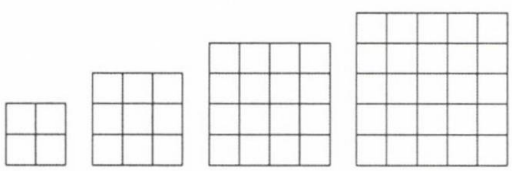
Hány egybevágó kis háromszög látható az alábbi ábrákon?



A nagy háromszög oldalait rendre 2, 3, 4, ..., n darab egyenlő részre osztottuk, és az osztópontokon át párhuzamosokat húztunk az oldalakkal. Észrevehető, hogy az osztópontok számának növelésével a háromszögek száma rendre 3, 5, 7, 9, ..., $(2n - 1)$-gyel nő.

Felosztások száma	Összeszámolható háromszögek száma
2	$1 + 3 = 4 = 2^2$
3	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
...	...
n	$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n \cdot \frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$

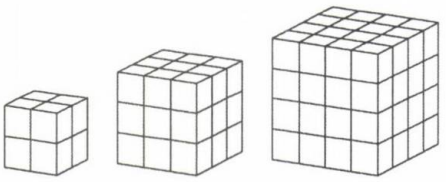
Hány (nem feltétlenül egybevágó) négyzet látható az alábbi ábrákon?



A nagy négyzet oldalait rendre 2, 3, 4, ..., n darab egyenlő részre osztottuk, és az osztópontokon át párhuzamost húztunk az oldalakkal.

Felosztások száma	Összeszámolható négyzetek száma
2	$2^2 + 1^2 = 5$
3	$3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$
4	$4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$
5	$5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 55$
...	...
n	$n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Hány kocka látható az alábbi ábrákon?



A legnagyobb kocka éleit rendre 2, 3, 4, ..., n egyenlő részre osztottuk, és osztópontokon át a lapsíkokkal párhuzamos síkokkal metszettük.

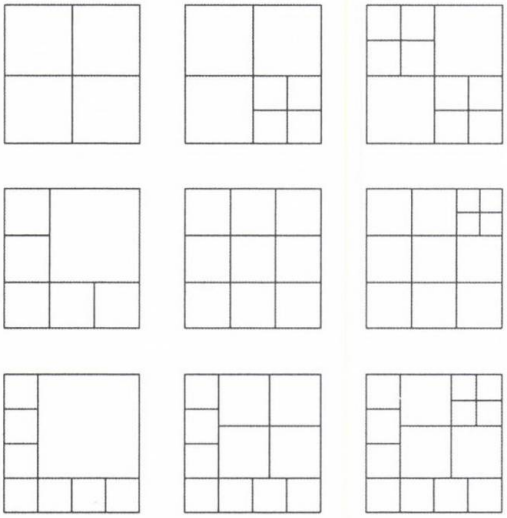
Felosztások száma	Összeszámolható kockák száma
2	$2^3 + 1^3 = 9 = 3^2$
3	$3^3 + 2^3 + 1^3 = 36 = 6^2$
4	$4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 100 = 10^2$
5	$5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 225 = 15^2$
...	...
n	$n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 2^3 + 1^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Feldarabolható-e egy négyzet 6, 7, 8, 9, 10, ..., n darab (nem feltétlenül egybevágó) négyzetre?

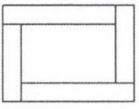
Ha berajzoljuk egy négyzet középvonalait, akkor 4 kisebb négyzet keletkezik. Könnyen észrevehető, hogy egy négyzetben bármely kisebb négyzettel megismételve ezt a felbontást, 3-mal növelhető a négyzetek száma. 4, 6, 8 négyzetre fel tudjuk bontani az eredeti négyzetet. Ezekből mint alapesetekből kiindulva és az említett eljárást tetszőlegesen sokszor megismételve fel tudjuk bontani a négyzetet

4, 7, 10, ..., $3k + 4$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$
6, 9, 12, ..., $3k + 6$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$
8, 11, 14, ..., $3k + 8$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

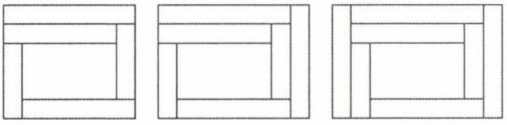
darab négyzetre.
Tehát ha $n \geq 6$, akkor a négyzet feldarabolható n számú négyzetre.



Egy téglalapot az ábrán látható módon 5 téglalapra bonthatunk úgy, hogy az öt téglalap közül semelyik 2 nem alkot egy újabb téglalapot. Felbontható-e hasonló módon egy téglalap 6, 7, 8, ..., n darab téglalapra?



Az 5 darab téglalapra való felbontás felhasználható a 6, 7, 8 téglalapra való megfelelő felbontáshoz, azt valamelyik oldalon 1-1 téglalappal megtoldva:

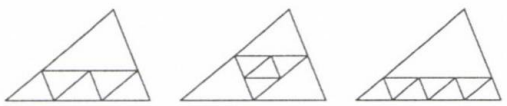


Mind a négy esetben a téglalapok száma 4-gyel növelhető, ha az 5. téglalapot az adott módon 5 téglalapra bontjuk. Ezt az eljárást tetszőlegesen sokszor meg lehet ismételni. Így a négy alapesetből kiindulva a feltételeknek megfelelően rendre előállíthatók a további téglalapokra való felbontások. Tehát minden $n \geq 5$ esetén van megfelelő felbontás.

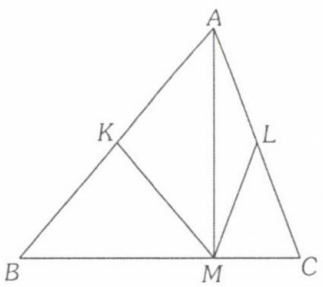
Felbontható-e minden háromszög 6, 7, 8, ..., n darab hozzá hasonló háromszögre?

A 6, 7, 8 darab hasonló háromszögre való felbontás az ábra szerint megoldható. Ha bármelyik kisebb háromszög középvonalait berajzol-

juk, 3-mal növelhető az eredeti háromszögben levő háromszögek száma. Az eljárást tetszőlegesen sokszor megismételhetjük, így a három alapesetből kiindulva az eredeti háromszöget fel tudjuk bontani $n \geq 6$ számú hasonló háromszögekre.



Igaz-e, hogy minden háromszög feldarabolható 4, 5, 6, ..., *n* darab egyenlő szárú háromszögre?



$n = 4$ esetén vágjuk szét a háromszöget egyik (a leghosszabb oldalhoz tartozó) magasságával két derékszögű háromszögre. Kössük össze a magasság talppontját a másik két oldal felezőpontjával. Így 4 darab háromszögre bontottuk fel az eredeti háromszöget. Ezek a kis háromszögek biztosan egyenlő szárúak, hisz pl. a Thalész-körre hivatkozva

$$AL = LC = LM \quad \text{és} \quad BK = KA = KM.$$

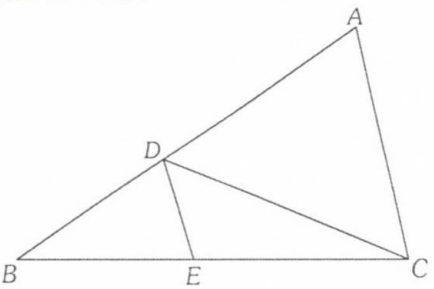
Ugyanilyen módon a részháromszögek bármelyikét fel tudjuk bontani 4 darab egyenlőszárú háromszögre. Az eljárás tetszőlegesen sokszori megismétlésével elérhető az eredeti háromszög $4, 7, 10, \ldots, 3k + 1$ darab egyenlőszárú háromszögre való felbontása ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

Az $n = 5$ eset vizsgálata

Ha a háromszög nem szabályos, akkor van két különböző oldala. Tegyük fel, hogy $AB > AC$. Legyen $AD = AC$. (A következő esetnél szereplő ábrának megfelelően.) Így az $ADC_\triangle$ egyenlőszárú háromszög. A $BDC_\triangle$-re az $n = 4$ esetén megismert eljárást rendre megismételve kapjuk, hogy az $ABC_\triangle$-et felbonthatjuk $5, 8, 11, \ldots, 3k + 2$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) darab egyenlő szárú háromszögre.

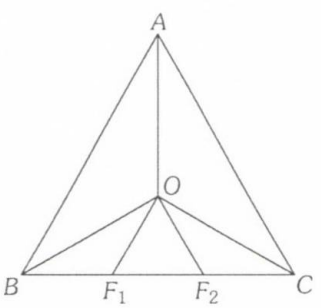
Az $n = 6$ eset vizsgálata

Ha a háromszög nem szabályos, akkor az előző esethez hasonlóan tegyük fel, hogy $AB > AC$, és legyen $AD = AC$.



Az $ADC_\triangle$ D csúcsnál levő szöge hegyesszög (egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge), így a $BDC_\triangle$-ben a D csúcsnál levő szög tompaszög, ezért $BC > BD$. Legyen $BE = BD$. Tehát eddig van két egyenlő szárú háromszög az $ABC_\triangle$-ben. A $DEC_\triangle$-re alkalmazva az $n = 4$ esetben megismert eljárást, kapjuk, hogy az $ABC_\triangle$-et fel lehet darabolni $6, 9, 12, \ldots, 3k$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$) darab egyenlő szárú háromszögre.

Végül térjünk ki a szabályos háromszög esetére. Ha $n = 4$ vagy $n \geq 6$, akkor az előző feladatban megismert eljárás alkalmazásával megfelelő felbontásokat kapunk. A mellékelt ábra mutatja, hogy $n = 5$ esetén is létezik megfelelő felbontás.



Eredményeinket összegezve kimondhatjuk, hogy minden háromszög felbontható $n \geq 4$ darab egyenlő szárú háromszögre.

Bizonyítsuk be, hogy egy kockát fel lehet darabolni 15, 22, 20, 41, 38, 52, 50, 2004 kockára!

15 kockára daraboláshoz először daraboljuk fel a kockát $2 \times 2 \times 2 = 8$ egybevágó kis kockára, majd ezen kis kockák közül valamelyiket daraboljuk fel szintén 8 kockára. A utóbbi darabo-

lásnál a feldarabolt kocka megszűnik, ezért 7-tel nő a kockák száma, tehát $8 + 7 = 15$ kockára daraboltuk fel az eredeti kockát.

22 kockára daraboláshoz az előző esetben kapott 15 kisebb kocka egyikét daraboljuk fel 8 kockára, így megint 7-tel nő a kockák száma az eredeti kockában, tehát $8 + 2 \cdot 7 = 22$ kockára daraboltuk fel az eredeti kockát.
Észrevehető, hogy az eljárást folytatva a kis kockák száma felbontható tetszőlegesen sokszor növelhető 7-tel. Így bizonyított, hogy egy kocka felbontható rendre 8, 15, 22, 29, ..., $8 + 7k$ ($k = 0, 1, 2, 3, ...$) darab kockára.

20 kockára daraboláshoz először daraboljuk fel a kockát $3 \times 3 \times 3 = 27$ egybevágó kis kockára. Ezután válasszunk ki egy $2 \times 2 \times 2$-es részt és az így kapott 8 kockát ragasszuk össze az érintkező oldallapok mentén. Így 8 kis kockából egyetlen kocka lesz, ezért 7-tel csökken az eredeti kockában levő kockák száma. Tehát $27 - 7 = 20$ kockára daraboltuk fel a nagy kockát.
Mivel a már ismert eljárással tetszőlegesen sokszor növelhető a kockák száma, rájöhetünk arra, hogy minden kocka felbontható 20, 27, 34, 41, 48, ..., $20 + 7k$ ($k = 0, 1, 2, ...$) darab kockára.
Így a 41 kockára való feldarabolást is megoldottuk.

38 kockára daraboláshoz először daraboljuk fel a kockát $4 \times 4 \times 4 = 64$ egybevágó kis kockára, majd egy $3 \times 3 \times 3$-as részt ragasszunk össze egy nagyobb kockává. Így a nagy kockában 26 kis kockával csökken a kockák száma, tehát $64 - 26 = 38$ kockára daraboltuk fel az eredeti kockát.
Az ismert eljárással rendre 7-tel növelve a kockák számát kimondható, hogy minden kocka feldarabolható 38, 45, 52, 59, 65, ..., $38 + 7k$ ($k = 0, 1, 2, ...$) darab kockára.
Így az 52 kockára darabolás is megoldott.

50 kockára daraboláshoz először daraboljuk fel a kockát 64 kis kockára, majd 2 db $2 \times 2 \times 2$-es részt (van 2 ilyen átfedés nélküli rész a nagykockában!) ragasszunk össze 1-1 kockává. Így a nagy kockát $64 - 2 \cdot 7 = 50$ kockára daraboltuk fel.
Észrevehető, hogy egy kockát k^3 ($k = 2, 3, 4, ...$) kis kockára feldarabolva $k^3 - 1$-gyel nő a kis kockák száma. Így egy-egy kis kockát k^3 kockára tetszőlegesen sokszor feldarabolva, a kockák száma egy kockából kiindulva akárhányszor növelhető $k^3 - 1$-gyel.

2004 kis kockára daraboláshoz pl. daraboljuk fel a kockát először $12 \times 12 \times 12 = 12^3$ kockára, majd két kis kockát $5 \times 5 \times 5 = 53$ db kockára és végül még 4 db kis kockát $2 \times 2 \times 2 = 8$ db kockára. Így az eredeti kockát összesen $12^3 + 2(5^3 - 1) + 4(2^3 - 1) = 2004$ db kockára daraboltuk fel.

Fel lehet-e darabolni egy kockát 49, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, ... kockára?

A 49 részre történő darabolás megtervezését az olvasóra bízzuk.

2000 kockára is fel lehet darabolni egy kockát. Pl. a következőképpen: Feldaraboljuk a kockát 43 db kis kockára, majd ezekből 4 db kocka mindegyikét 50 db kockára, majd 36 db-ot 49 kockára, majd 1 db-ot 27, és végül 1 db-ot 8 kockára. Az így kapott kockák száma összesen:

$$43 + 4(50 - 1) + 36(49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1) = 2000$$

2001, 2002, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006 kockára darabolás egy lehetséges módja kiolvasható az alábbi számkifejezésekből:

$$2001 = 48 + 40 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$
$$2002 = 49 + 40 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$
$$2003 = 50 + 40 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$
$$2004 = 50 + (50 - 1) + 39 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$
$$2005 = 50 + 2 \cdot (50 - 1) + 38 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$
$$2006 = 50 + 3 \cdot (50 - 1) + 37 \cdot (49 - 1) + (27 - 1) + (8 - 1)$$

Egy általánosítási lehetőség:
Ha $n \geq 2000$, akkor minden kocka feldarabolható n darab kockára.

További vizsgálat tárgyát képezheti annak megoldása, hogy $9 \leq n \leq 1999$ esetén mely n-ekre oldható meg egy kocka n kockára való feldarabolása.

Szoldatics József

A Pell-egyenlet

Az $x^2 - Dy^2 = 1$, ahol x, y, $D \in \mathbb{Z}$ alakú egyenletet Pell egyenletnek nevezik.

John Pell (1611-1685, Anglia) dolgozott Angliában (Cambridge, Horsham, Chichester), valamint Amszterdamban és Bredában. Foglalkozott algebrával és számelmélettel. 1668-ban táblázatot adott ki, amelyben az első 100 000 egész szám szorzattá bontása szerepelt. Sokat publikált, többek között: *Idea of Mathematics* (1638) és *Controversiae de vera circuli mensura* (1647).

Az $y^2 = ax^2 + 1$ alakú egyenletet Euler hibásan nevezte el Pell-egyenletnek, mert Pell nem foglalkozott vele.

Határozzuk meg azokat az egész k számokat, melyekre a

a) $k^2 + 4k + 4$
b) $k^2 + 4k + 3$
c) $2k^2 + 4k + 3$

kifejezések négyzetszámokat vesznek fel.

a) Mivel a kifejezésünk teljes négyzet $(k + 2)^2$, ezért minden egész k esetén négyzetszámot kapunk.

b) Legyen m a keresett egész szám, amelyre $k^2 + 4k + 3 = m^2$, átrendezve

$$(k + 2 + m)(k + 2 - m) = 1.$$

Ekkor a lehetséges értékeket táblázatba foglalva kapjuk, hogy

$k+2+m$	$k+2-m$	k	m
1	1	–1	0
–1	–1	–3	0

Tehát k-ra két olyan értéket kaptunk (–3 és –1), amelyre az adott kifejezés négyzetszámot vesz fel.

c) Legyen m a keresett egész szám, amire $2k^2 + 4k + 3 = m^2$, átrendezve

$$1 = m^2 - 2(k + 1)^2.$$

Vezessük be az alábbi ismeretleneket:

$$x = m \text{ és } y = k + 1,$$

ahol x és y szintén egész számok.
Ekkor a kérdésünk már így hangzik: létezik-e (végtelen sok) egész megoldása a következő egyenletnek:

$$x^2 - 2y^2 = 1?$$

Legyen

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

sorozat. Ekkor állítjuk, hogy az így megadott számok szintén megoldások (végtelen sok).
Állításunkat bizonyítsuk teljes indukcióval! Könnyen belátható, hogy a (3; 2) megoldás. Tegyük fel, hogy van egy megoldáspárunk $(x_n; y_n)$ és nézzük a képzési szabály szerinti következő megoldást:

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (3x_n + 4y_n)^2 - 2(2x_n + 3y_n)^2 =$$
$$= (9x_n^2 - 24x_ny_n + 16y_n^2) -$$
$$- 2(4x_n^2 + 12x_ny_n + 9y_n^2) = 9x_n^2 - 24x_ny_n +$$
$$+ 16y_n^2 - 8x_n^2 - 24x_ny_n - 18y_n^2 = x_n^2 - 2y_n^2 = 1,$$

azaz a képzési szabály szerint kapott újabb számpár is megoldás.
Ekkor az eredeti feladatba visszahelyettesítve kapjuk:

$$\begin{cases} m_1 = 3 \\ k_1 = 1 \end{cases} \text{ és } \begin{cases} m_{n+1} = 3m_n + 4k_n + 4 \\ k_{n+1} = 2m_n + 3k_n + 2 \end{cases} \quad n \geq 1$$

Azaz tényleg végtelen sok megoldást kaptunk. A szabályt alkalmazva megkapjuk az első három megoldáspárt:

k	m	$2k^2 + 4k + 3$
1	3	$9 = 3^2$
11	17	$289 = 17^2$
69	99	$9801 = 99^2$

Megválaszolatlan kérdések:
Van-e ezeken kívül más megoldás (megkaptuk az összeset)?
Honnan jön ez a rekurziós összefüggés?

Az egyenlet általános megoldása

Az egyenletnek (tetszőleges D érték esetén) megoldásai az $(1; 0)$ és a $(-1; 0)$ számpárok (triviális megoldás). Az is nyilvánvaló, hogy ha $(x; y)$ megoldás, akkor az $(x; -y)$, $(-x; y)$ és $(-x; -y)$ szintén megoldás. Keressük ezért csak a pozitív, nem triviális egész megoldásokat. Ha találunk megoldásokat, akkor az x és y között további összefüggést írhatunk fel. Az egyenlet $x^2 = 1 + Dy^2$ alakjából kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + D,$$

ahonnan

$$\frac{x}{y} = \sqrt{D + \frac{1}{y^2}} \approx \sqrt{D},$$

feltéve, hogy y „nagy".
(Ez azt jelenti, hogy a megoldások hányadosa jó közelítést ad $\sqrt{D}$-re.)

Vizsgáljuk most meg, hogy D mely értéke esetén kapunk (nem triviális) megoldást:

I. eset: $D = -m$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $x^2 - (-my^2) = 1$, ahonnan $x^2 + my^2 = 1$.
Ennek megoldása csak a triviális megoldás, hiszen $1 = x^2 + my^2 \geq x^2 \geq 1$, vagyis $x = \pm 1$, $y = 0$.

II. eset: $D = m^2$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$. Most $x^2 - m^2y^2 = 1$, amiből $(x - my)(x + my) = 1$.
Ennek megoldása csak a triviális megoldás, hiszen:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x - my = 1 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} x + my = -1 \\ x - my = -1 \end{cases}$$

lehet csak, ami szintén csak a triviális megoldáspárokat adja.

III. eset: $D > 0$, és nem négyzetszám. Keressük meg ebben az esetben az összes megoldást! Ha már ismerünk (nem triviális) megoldást, akkor tudunk konstruálni újabbakat a következő állítás felhasználásával.

1. Állítás: Ha $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ a Pell-egyenlet megoldásai, akkor megoldások az

(1) $\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$

(2) $\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$

(3) $\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$

(4) $\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$

összefüggésekkel meghatározott $(x; y)$ számok is.

Bizonyítsuk, hogy az első megoldás! Végezzük el az előírt műveleteket:

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$

$$(x_1x_2 + y_1y_2D) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{D} = x + y\sqrt{D}$$

$$\begin{cases} x = x_1x_2 + y_1y_2D \\ y = x_1y_2 + x_2y_1 \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy ez tényleg megoldás:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2D &= (x_1x_2 + y_1y_2D)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2D = \\ &= x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2D + y_1^2y_2^2D^2) - \\ &\quad - (x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2)D = \\ &= x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2D + y_1^2y_2^2D^2 - x_1^2y_2^2D - \\ &\quad - 2x_1x_2y_1y_2D - x_2^2y_1^2D = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2D^2 - \\ &\quad - x_1^2y_2^2D - x_2^2y_1^2D = x_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2D + y_1^2y_2^2D^2 - \\ &\quad - x_2^2y_1^2D = x_1^2(x_2^2 - y_2^2D) - y_1^2D(x_2^2 - y_2^2D) = \\ &= (x_1^2 - y_1^2D)(x_2^2 - y_2^2D) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

A többi esetre ugyanígy adódik az állítás.

A megoldás létezéséhez szükségünk lesz egy újabb állításra.

2. Állítás: Ha $\alpha > 0$ irracionális szám és $n > 0$ tetszőleges egész szám, akkor léteznek olyan p és q egész számok $0 < p \leq q < n$, melyekre

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{n}.$$

Tekintsük az α, 2α, 3α, ..., $(n-1)\alpha$ számokat, és ábrázoljuk őket egy n egyenlő részre felosztott egységkerületű körön. Igazak a következő állítások:
Ezek közül egyik sem esik osztópontra α irracionalitása miatt.
Ha van pont az első és az utolsó intervallumban, akkor kész a bizonyítás (miért?).
Ha nincs sem az első, sem az utolsó intervallumban egyik ábrázolt szám sem, akkor van

olyan intervallum, amelyben legalább 2 szám található. Ekkor léteznek a p_1 és p_2 számok, melyekre

$$q < |p_1\alpha - p_2\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

valamely q egészre. Az egyenlőtlenséget rendezve

$$q < |p_1\alpha - p_2\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

$$q < |(p_1 - p_2)\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

$$|(p_1 - p_2)\alpha - q| < \frac{1}{n}.$$

És ezzel a 2. állítást bebizonyítottuk.
A következő lépésben bizonyítsuk be, hogy az egyenlet jobb oldalára tudunk olyan egész számot írni, melyre egyenletünknek végtelen sok megoldása lesz.

3. Állítás: Létezik olyan k egész szám, melyre végtelen sok megoldása van a

$$x^2 - y^2D = k$$

egyenletnek.

Legyen $n_1 > 1$ tetszőleges egész szám. Ekkor $\sqrt{D}$-hez léteznek olyan x_1 és y_1 egész számok (2. állítás), melyekre

$$|x_1 - y_1\sqrt{D}| < \frac{1}{n_1}.$$

Először becsüljük meg a bal oldali kifejezés értékét:

$$|x_1 + y_1\sqrt{D}| = |x_1 - y_1\sqrt{D} + 2y_1\sqrt{D}| <$$

$$< \frac{1}{n_1} + 2y_1\sqrt{D} < \frac{1}{n_1} + 2n_1\sqrt{D}.$$

Ezt alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x_1^2 - y_1^2D| < \frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_1} + 2n_1\sqrt{D}\right) =$$

$$= \frac{1}{n_1^2} + 2\sqrt{D} < 1 + 2\sqrt{D}.$$

Itt a bal oldalon 0 nem állhat (α irracionalitása miatt), ezért létezik olyan n_2 egész szám ($> n_1$), melyre

$$0 < \frac{1}{n_2} < |x_1^2 - y_1^2D|.$$

Ilyen szám végtelen sok van, válasszunk ezekből egy tetszőlegeset. Az előző gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy léteznek olyan x_2 és y_2 egész számok, melyekre

$$|x_2 - y_2\sqrt{D}| < \frac{1}{n_2}.$$

Ebben az esetben is igaz, hogy

$$|x_2^2 - y_2^2D| < 1 + 2\sqrt{D}.$$

Hasonlóan folytatva kapunk $(x_n; y_n)$ végtelen sok megoldást, melyekre

$$|x_n^2 - y_n^2D| < 1 + 2\sqrt{D}.$$

Mivel az egyenlőtlenség bal oldalán egész szám áll (egyik sem 0!):

$$|x_n^2 - y_n^2D| < 1 + 2\sqrt{D}$$

$$-(1 + 2\sqrt{D}) < x_n^2 - y_n^2D < 1 + 2\sqrt{D}.$$

Így $x^2 - y^2D$ kifejezés értékére csak annyi értéket kaphatunk, amennyi ebben az intervallumban van. Legyen ezen egészek száma m.
Ekkor van m skatulyánk és végtelen sok elemünk. A skatulya-elv következtében biztosan van olyan, amelyben végtelen sok elem található, azaz

$$\exists k \in Z \quad k \in \left(-1 - 2\sqrt{D}; 1 + 2\sqrt{D}\right),$$

melyre az $x^2 - y^2D = k$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.
Most bebizonyítjuk, hogy az $x^2 - y^2D = 1$ egyenletnek is van nem triviális megoldása.

4. Állítás: Az $x^2 - y^2D = 1$ egyenletnek van (nem triviális) megoldása.
A 3. állítás szerint van olyan k egész szám, melyre az

$$x^2 - y^2D = k$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van.
Közülük van 2 olyan, melyre igaz az, hogy a megoldások x értéke is és y értéke is ugyanazt a maradékot adja k-val osztva, jelöljük őket $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$. Ekkor tekintsük a következő 2 számot:

$$a = \frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{k}, \quad b = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}.$$

Ezek egész számok és egyik sem 0. Ugyanakkor:

$$a^2 - b^2D = \left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{k}\right)^2 - \left(\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}\right)^2 D =$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2D + y_1^2y_2^2D^2 - x_1^2y_2^2D + 2x_1x_2y_1y_2D - x_2^2y_1^2D}{k^2} =$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2D^2 - x_1^2y_2^2D - x_2^2y_1^2D}{k^2} =$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2D + y_1^2y_2^2D^2 - x_2^2y_1^2D}{k^2} =$$

$$= \frac{x_1^2(x_2^2 - y_2^2D) - y_1^2D(x_2^2 - y_2^2D)}{k^2} = \frac{(x_1^2 - y_1^2D)(x_2^2 - y_2^2D)}{k^2} = 1$$

Azaz $a^2 - b^2D = 1$.

Kaptuk, hogy egyenletünknek van megoldása (4. állítás), és ha ismerünk egy nem triviális megoldást, akkor elő tudunk állítani végtelen sok megoldást (1. állítás). Az 1. állításban használt összefüggést az első (nem triviális) számpárra alkalmazva kapjuk, hogy megoldásaink általános alakja az

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$$

összefüggés felhasználásával adható meg, ahol $(x_1; y_1)$ a legkisebb megoldás.

Ugyanakkor a megoldás írható a

$$x_n - y_n\sqrt{D} = \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n$$

alakba is.

Ekkor azonban a keresett x_n és y_n értékek kifejezhetők az előző két összefüggés felhasználásával:

$$x_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n}{2},$$

$$y_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n}{2\sqrt{D}}.$$

Még nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy van-e más megoldása az egyenletnek.

5. Állítás: Az $x^2 - y^2D = 1$ egyenletnek nincs más – a 4. állítás után megadottól különböző – megoldása.

Bizonyítsunk indirekt módon. Tegyük fel, hogy találunk másik megoldást, amely nem esik az $x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$ sorozat elemei közé, ahol x_1 és y_1 a legkisebb nem triviális megoldás (ennek léteznie kell, miért?). Legyen az új, sorozatba nem illő megoldás $(a; b)$. Ekkor létezik olyan n egész szám, melyre

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n < a + b\sqrt{D} < \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{n+1}.$$

Ekkor az 1. állítást használva szintén megoldás a

$$1 < \left(a + b\sqrt{D}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n < x_1 + y_1\sqrt{D},$$

ami azt jelenti, hogy találtunk egy még kisebb megoldást, mint a x_1 és y_1, ami a feltevésünk szerint a legkisebb. Ez ellentmondás, tehát e kapott összefüggés az összes megoldást megadja.

A továbbiakban tekintsük a $x^2 - y^2D = k$ egyenleteket. Itt k tetszőleges egész szám.

6. Állítás: Ha van megoldás, akkor végtelen sok megoldása van az egyenletnek.

Tegyük fel, hogy $(x_0; y_0)$ a legkisebb, nem triviális megoldása az $x^2 - y^2D = k$ egyenletnek, és $(x_1; y_1)$ megoldása a neki megfelelő Pell-egyenletnek. Ekkor az előzőekben bizonyított módon belátható, hogy az összes megoldás

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n.$$

Térjünk vissza az eredeti felvetett kérdésekhez!

Van-e még megoldás a találtakon kívül?

Ha lenne, akkor a Pell-egyenletnek is találnánk még megoldását, ami nem lehet. Így az összes megoldást megtaláltuk.

Honnan jön ez a rekurziós összefüggés?

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

Tudjuk, hogy összes megoldás felírható a következő alakban:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n.$$

Alkalmazzuk ezt a következő megoldásra is:

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n\left(3 + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= 3x_n + 4y_n + 2x_n\sqrt{2} + 3y_n\sqrt{2} =$$

$$= (3x_n + 4y_n) + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2},$$

és ez a megadott rekurziós szabály!

Az első 100 D értékhez tartozó legkisebb, nem triviális megoldások:

D	x	y
1	–	–
2	3	2
3	2	1
4	–	–
5	9	4
6	5	2
7	8	3
8	3	1
9	–	–
10	19	6
11	10	3
12	7	2
13	649	180
14	15	4
15	4	1
16	–	–
17	33	8
18	17	4
19	170	39
20	9	2
21	55	12
22	197	42
23	24	5
24	5	1
25	–	–
26	51	10
27	26	5
28	127	24
29	9801	1820
30	11	2
31	1520	273
32	17	3
33	23	4
34	35	6
35	6	1
36	–	–
37	73	12
38	37	6
39	25	4
40	19	3
41	2049	320
42	13	2
43	3482	531
44	199	30
45	161	24
46	24335	3588
47	48	7
48	7	1
49	–	–
50	99	14

D	x	y
51	50	7
52	649	90
53	66249	9100
54	485	66
55	89	12
56	15	2
57	151	20
58	19603	2574
59	530	69
60	31	4
61	1766319049	226153980
62	63	8
63	8	1
64	–	–
65	129	16
66	65	8
67	48842	5967
68	33	4
69	7775	936
70	251	30
71	3480	413
72	17	2
73	2281249	267000
74	3699	430
75	26	3
76	57799	6630
77	351	40
78	53	6
79	80	9
80	9	1
81	–	–
82	163	18
83	82	9
84	55	6
85	285769	30996
86	10405	1122
87	28	3
88	197	21
89	500001	53000
90	19	2
91	1574	165
92	1151	120
93	12151	1260
94	2143295	221064
95	39	4
96	49	5
97	62809633	6377352
98	99	10
99	10	1
100	–	–

És végül néhány feladat, amelyek megoldásához szükség van a Pell-egyenletek elméletének ismeretére.

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész n-re ($n \in \mathbb{N}$) teljesül, hogy az első n egész szám összege négyzetszám! (Keressük meg az összes megoldást!)

2. Keressük meg az összes olyan k és m egész számokat ($k < m$), melyekre

$$1 + 2 + \ldots + k = (k + 1) + (k + 2) + \ldots + m.$$

(Keressük meg az összes megoldást!)

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re lesz egyidőben $2n + 1$ és $3n + 1$ is négyzetszám!

4. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egymás utáni három egész szám van, amelyek felbonthatók 2 egész szám négyzetösszegére!

5. Keressük meg az összes olyan háromszöget, melynek oldalai egymás utáni egész számok és a területe is egész szám. (Keressük meg az összes megoldást!)

6. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész megoldása van a $x^2 + y^3 = z^4$ egyenletnek.

Irodalom

[1] Derek Smith: The Search For An Exhaustive Solution to Pell's Equation, Internet

[2] H. W. Lenstra Jr.: Solving the Pell Equation, Notices of the AMS, Volume 49, Number 2, 2002 February

[3] Kin Y. Li: Pell's Equation (I), Mathematical Excalibur, Volume 6, Number 3. 2001 June – October

[4] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Bhaskara_II.htm

[5] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Brahmagupta.html

[6] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Narayana.html

[7] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Pell.html

[8] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pell.html

[9] http://mathworld.wolfram.com, Diophantine Equation 2nd Powers

[10] http://mathworld.wolfram.com, Pell Equation

Tóth Mariann

Miért nem kérdezünk vissza?

Gyakran hallhatjuk ezt a kérdést gyerektől, ha metarejtvényeket adunk fel neki. Ezek olyan feladatok, melyekben gyakran valamilyen információt nem ismerünk; de tudjuk, hogy a feladat szereplőinek ezek segítségével sikerült-e megtalálniuk a megoldást. A diákok többsége, mikor először találkozik ilyen jellegű problémával, nem nagyon tud „fogást találni" rajta, hiszen „nem tudunk semmit", minden lényeges dolgot elfelejtettünk, nem hallottunk... Igyekeztem ezért egy olyan feladatsort összeállítani, mely végén talán olyan rejtélyek is kibogozhatóvá válnak, melyek első ránézésre reménytelennek látszanak.

Feladatok

1. A következő kaland a Lovagok és lókötők szigetén játszódik (a lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak). Találkoztam két lakossal, akik egy fa alatt heverésztek. Megkérdeztem az egyiküket: „Lovag valamelyikük?" Ő válaszolt, és én tudtam, hogy mi a helyes válasz a kérdésemre. Mifélék voltak a lakosok?

2. Ebben a feladatban két testvérről lesz szó, akikről tudjuk, hogy mindkettő ugyanolyan típusú. Megkérdezték tőlük, hogy házasok-e.
András: Legalább az egyikünk nős.

Béla pedig vagy azt felelte, hogy ő maga nős, vagy azt, hogy nem, de nincs feljegyezve, hogy e kettő közül melyiket. De az, aki kikérdezte őket, nagyon bölcs volt, és a válaszából már tudott következtetni mind András, mind pedig Béla családi állapotára.
András nős vagy nem? És Béla?

3. Egy páncélszekrényben gyémánt nyakékek vannak. Minden nyakék ugyanannyi gyémántból áll. Ha tudnánk, hogy hány darab gyémánt van a páncélszekrényben, akkor tudnánk, hogy hány nyakék van a szekrényben, és persze azt is, hogy egy nyakék hány gyémántból van elkészítve.
Annyit tudunk még, hogy a páncélszekrényben lévő gyémántok száma 200 és 300 között van. Hány nyakék van a páncélszekrényben?

4. Három matematikus beszélgetett egyszer Erdélyről, ahol külön-külön mindannyian jártak már. Erdélyben, amikor ők arra jártak, a lakosoknak kb. a fele ember volt, a fele vámpír. Az emberek és a vámpírok külsejük alapján megkülönböztethetetlenek, de az emberek mindig igazat mondanak, a vámpírok mindig hazudnak. Ami még bonyolultabbá teszi a helyzetet, az az, hogy Erdély lakosságának a fele tökéletesen őrült, kényszerképzeteik vannak: minden igaz állítást hamisnak gondolnak, és minden hamis állítást igaznak hisznek. A lakosság másik fele teljesen egészséges, tudja melyik állítás igaz és melyik hamis. Így a lakosokat négy típusba sorolhatjuk: egészséges emberek, őrült emberek, egészséges vámpírok és őrült vámpírok. A matematikusok a következőket mesélték erdélyi kalandjaikról:
„Amikor ott jártam – mondta az első matematikus – találkoztam egy Igor nevű erdélyivel. Megkérdeztem tőle, hogy őrült ember-e. Igor válaszolt, de a válaszából nem tudtam meg, hogy miféle."
„Érdekes egybeesés – szólalt meg a második matematikus –, hogy ugyanezzel az Igorral találkoztam én is saját utam során. Megkérdeztem tőle, hogy egészséges ember-e. Igor válaszolt, de a válaszából nem tudtam meg, hogy miféle."
„Többszörös egybeesésről van szó! – kiáltott fel a harmadik matematikus – Én is találkoztam Igorral, és megkérdeztem, hogy őrült vámpír-e. Válaszolt, de én sem tudtam rájönni, hogy miféle."
Egészséges-e Igor vagy őrült? Ember vagy vámpír?

5. Ez a történet a régmúltban játszódik. Még gőzmozdonyok húzták a vonatokat. Ilyen vonaton gyakran megesett, hogy az ablakon beszállt a korom. Egy verőfényes nyári napon négy mogorva ember utazott egy fülkében. Az egész utazás alatt még egy köszönésre sem méltatták útitársaikat (nemcsak mogorvák, hanem udvariatlanok is voltak). Az ablakon beszálló füsttől néhányuk arca kormos lett. A fülkében és az egész vonaton nem volt tükör, így erről a tényről nem szerezhettek tudomást. Bejött a kalauz. Mivel az utasok vele is udvariatlanok voltak, így ő is csak mérsékelten volt segítőkész.
– Uraim – mondta –, sajnos néhányuk arca kormos lett. Mosakodni csak az állomásokon lehet, de csak az szállhat le, aki biztos benne, hogy ő kormos. Viszlát!
Az utasok továbbra sem szóltak egymáshoz, meg se moccantak – majd a harmadik megállónál néhányan kiszálltak. Hányan? (Az utasok mogorvák, de okosak.)

6. A Lovagok és lókötők szigetén már gyanították az emberek, hogy van közöttük egy áruló, de nem tudták, hogy ki az. A három fő gyanúsított a következőket mondta: A azt állította, hogy B az áruló, B szerint pedig C. Craig felügyelő megkérdezte C-től, hogy mindhárman ugyanolyan típusúak-e. C erre igennel vagy nemmel válaszolt. A felügyelő gondolkodott, majd azt mondta:
„– Egyelőre nincs elég bizonyítékom ahhoz, hogy valamelyikőtöket elítéljem." Majd rámutatott az egyik gyanúsítottra, és azt mondta neki:
„– Biztos, hogy nem te vagy az áruló, úgyhogy szabad vagy."
A felmentett ember boldogan elment, míg a másik kettő ott maradt. Ekkor Craig felügyelő megkérdezte az egyiküket:
„– Ti ketten ugyanabban az istenben hisztek?"
A megszólított igennel válaszolt, mire Craig felügyelő már tudta, ki az áruló. Ki volt az?

7. A következő feladat az Álmok szigetéhez kapcsolódik. A sziget lakosainak álmai teljesen életszerűek, a gondolkodásuk éppolyan élénk, amikor alszanak, mint mikor ébren vannak. Ráadásul álombeli életük éppúgy folytatódik éjszakáról éjszakára, mint ahogy éber életük nap-

ról napra. Ennek eredményeképpen néhány lakosnak időnként nagy nehézséget okoz annak eldöntése, hogy éppen ébren van, vagy alszik.
A sziget lakosai két típusba sorolhatók, minden lakos nappali vagy éjszakai típusú. A nappali lakosokat az jellemzi, hogy minden, amit ébren hisznek, az igaz, és minden, amit álmukban hisznek, az hamis. Az éjszakai lakosok ennek ellentétei, amit álmukban hisznek, az igaz, és minden, amit ébren hisznek, az hamis.
Egyszer a következő rejtvényt adták fel egy matematikusnak erről a szigetről:
„Egy lakos egyszer azt hitte, hogy ő nappali típusú és ébren van. Miféle az illető?"
A matematikus gondolkodott egy darabig, aztán azt válaszolta: „De hiszen nyilvánvaló, hogy ennyiből nem lehet eldönteni!" Ebben persze igaza volt. Ekkor egy igen ravasz kérdést tett fel: „Ki lehetne deríteni, hogy az illető ébren volt, vagy aludt, ha elárulnád, hogy nappali vagy éjszakai típusú?" Válaszoltak a kérdésére, és azután már meg tudta oldani a rejtvényt.
Nappali vagy éjszakai típusú volt a szigetlakó, és ébren volt-e vagy aludt?

8. Az Álmok szigetéhez kapcsolódik a következő feladvány is:
„Egyszer egy szigeten lakó hölgy azt hitte, hogy ő alszik, és éjszakai típusú. Miféle volt valójában?" A matematikus rögtön észrevette, hogy ennyi információ nem elég. „El tudnám dönteni, hogy az illető hölgy aludt vagy ébren volt, ha elárulnád, hogy éjszakai vagy nappali típusú" Válaszoltak neki, de így sem tudta megoldani a rejtvényt.
Néhány nappal később feladták ugyanezt a rejtvényt egy másik matematikusnak. Ez a második matematikus is észrevette, hogy ennyi információ nem elég, és a következő kérdést tette fel: El tudnám dönteni, hogy az illető hölgy nappali vagy éjszakai típusú, ha elárulnád, hogy ébren volt-e vagy aludt? Válaszoltak neki, de nem tudta megoldani a feladatot (neki is kevés volt ennyi információ).
Nekünk viszont ezen a ponton már elegendő információ áll a rendelkezésünkre a rejtvény megoldásához! Nappali vagy éjszakai típusú volt a hölgy, és ébren volt-e vagy aludt?

9. Két jó barát, Szor Zoltán és Összeg Elek gyors gondolkodású matematikusok. Egy alkalommal egy közös barátjuk gondolt két számot, és a két szám szorzatát megsúgta Szor Zoltánnak, az összeget pedig Összeg Eleknek árulta el. Azt is közölte mindkettővel, hogy mind a két szám, illetve a szorzat és az összeg is nagyobb 1-nél és kisebb 100-nál.
– Nos találja ki valamelyikőtök ebből a két számot! – mondta a közös barát.
Rövid gondolkodás után Összeg Elek így szólt Szor Zoltánhoz:
– Én csak annyit tudok, hogy te nem tudod.
– Akkor én tudom! – kiáltott fel örvendezve Szor Zoltán.
– Akkor én is! - sóhajtott megkönnyebbülve Elek.
Mi volt a két gondolt szám?

10. A lovagok, lókötők és normálisak szigetén járunk. (A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak, a normálisok pedig, hol igazat mondanak, hol hazudnak.) Az eset szereplői a vádlott, az ügyész és a védőügyvéd. Tudni lehet, hogy közülük az egyik lovag, a másik lókötő, a harmadik pedig normális. Ami még furcsább, a bíróság tudta, hogy ha a vádlott nem bűnös, akkor a tettes vagy a védőügyvéd, vagy az ügyész volt. Azt is lehet tudni, hogy a bűnös nem lókötő.
Vádlott: Ártatlan vagyok.
Védőügyvéd: Védencem tényleg ártatlan.
Ügyész: Nem igaz, a vádlott bűnös.
Ezek az állítások elég természetesnek hangzanak. Az esküdtek összeültek, de nem tudtak döntésre jutni, a bizonyítékok nem voltak elegendőek. Craig felügyelőt hívták segítségül, aki elhatározta, hogy nemcsak a bűnöst keresi meg, hanem kideríti azt is, hogy ki milyen típusú. Először is megkérdezte az ügyésztől: „Véletlenül nem ön a bűnös?" Az ügyész válaszolt. Craig felügyelő gondolkodott egy darabig, majd megkérdezte a vádlottat: „Bűnös az ügyész?" A vádlott válasza után Craig felügyelő már mindent tudott.
Ki volt a bűnös, és ki milyen típusú?

11. Egy alkalommal négy férfival végeztek egy felmérést. Mindegyik férfi előtt egy-egy háromfiókos komód állt, s minden fiókban egy-egy smaragd vagy rubin volt. Az egyik komódban három smaragd volt, egy másikban három rubin volt, a harmadikban két smaragd és egy rubin, a negyedikben pedig egy smaragd és két rubin. A négy címkét ráragasztották a négy komódra, és a négy férfi mindegyikének azt mond-

ták, hogy rossz címke van a komódján. Egyik férfi sem látta a többiek címkéit, csak a sajátját. Mindegyiküket megkérték, húzzanak ki két fiókot saját komódjukból, aztán mondják meg, milyen kő van a harmadik fiókban. Az első férfi kihúzott két fiókot, majd ezt mondta:
– Két smaragdot találtam, és tudom mi a harmadik kő.
Aztán a második férfi is kihúzott két fiókot, és azt mondta:
– Egy smaragdot és egy rubint találtam, és tudom, mi a harmadik kövem.
Aztán a harmadik férfi is kihúzott kettőt a fiókjai közül, és ezt mondta:
– Két rubinra leltem.
Erre a felmérés vezetője megkérdezte tőle:
– Ez mind szép és jó, de azt tudja-e, milyen kő van a harmadik fiókban? A férfi igennel vagy nemmel válaszolt, de nem tudjuk, melyikkel. Na, mármost, ha elárulnák, akkor ki tudnád találni, hogy melyik kövek voltak a komódban és melyiken milyen címke volt.

Megoldások

1. Tegyük fel, hogy a kérdésemre „Igen" választ kaptam. Meg tudom-e ez alapján mondani, hogy legalább egyikük lovag? Ha a válaszadó lovag, akkor igaz volt az „Igen" válasz. Viszont lehet az is, hogy mindketten lókötők, ekkor pedig hazug válasz lett volna az „Igen". Ezért „Igen" esetén nem tudtam volna, hogy mi a helyes válasz.
Ha a válasz „Nem" volt, akkor ezt nem kaphattam lovagtól (ugyanis ekkor van köztük lovag, így a „Nem" hazugság). Így akitől kérdeztem, az lókötő, „Nem" válasza pedig hazugság, ami pedig csak úgy lehet, ha a másik lakos lovag. Tehát a válaszadó lókötő, a másik pedig lovag.

2. A testvérek vagy mindketten lovagok, vagy mindketten lókötők. Vizsgáljuk meg, hogy milyen válaszokat kaphatunk a kérdésekre. Ha mindketten lovagok, akkor András válasza igaz. Ekkor testvére vallhatta magát nősnek (ha tényleg az), vagy nőtlennek (ha András nős, Béla pedig nőtlen). Ha mindketten lókötők, akkor András válasza hamis, tehát egyikük sem nős. Béla ebben az esetben nősnek mondja magát (hamisan). Vagyis ha Béla azt mondja magáról, hogy nős, nem tudhatjuk, hogy mi az igazság. Így csak az lehet, hogy Béla nőtlen, András nős és mindketten lovagok.

3. Ha a páncélszekrényben lévő gyémántok számából már következtetni lehet a nyakékek és az azon lévő gyémántok számára is, akkor ezt a számot csak egyféleképpen lehet felírni két szám szorzatára. Ez a szám tehát két prímszám szorzata. Ha a prímek különbözőek lennének, akkor még mindig nem tudnánk, hogy melyik ezek közül a nyakékek száma, így a keresett számunk egy prímszám négyzete. 200 és 300 közt az egyetlen ilyen szám a $289 = 17^2$. A páncélszekrényben tehát 17 nyakék van, és mindegyiken 17 gyémánt.

4. Vizsgáljuk meg, hogy a matematikusok kérdéseire mit válaszolhat Igor!
Az első kérdésre „Igen"-t válaszol egy egészséges ember (mert egészséges embernek véli magát, és ezt meg is mondja); egy őrült ember (mert tévesen egészséges embernek gondolja magát, és ezt meg is mondja); és egy egészséges vámpír (ő tudja, hogy nem egészséges ember, és hazudni fog). „Nem"-et csak őrült vámpír válaszol (mert tévesen azt gondolja, hogy egészséges ember, és hazudni fog). Mivel az első matematikus nem tudta megállapítani, hogy Igor miféle, ezért ő nem válaszolhatott „Nem"-et, vagyis nem őrült vámpír.
A második matematikus kérdésére „Nem"-et válaszol egy egészséges ember; egy egészséges vámpír és egy őrült vámpír is. „Igen"-t viszont csak egy őrült ember válaszol. A második matematikus sem tudja, hogy Igor miféle, ezért Igor nem lehet őrült ember.
A harmadik matematikus kérdésére „Igen"-t válaszol egy egészséges vámpír, egy őrült ember és egy őrült vámpír is. „Nem"-et csak az egészséges emberek válaszolnak erre a kérdésre. Tehát Igor nem egészséges ember.
Ezért ha Igor nem őrült vámpír, nem őrült ember és nem is egészséges ember, akkor csak egészséges vámpír lehet.

5. Vizsgáljuk általánosan a feladatot, mikor fordul az elő, hogy az n-edik állomáson száll le néhány utas?
Az első állomáson csak akkor száll le valaki, ha egyedül az ő arca kormos. Ekkor ugyanis nem lát kormot a többiek arcán, de tudja, hogy valakié kormos, így az csak ő lehet.

Ha az első megállónál nem száll le senki, mindenki tudni fogja, hogy legalább két ember arca kormos. Ezért ha valaki csak egy arcon lát kormot, tudni fogja, hogy az övé is biztosan piszkos. Ekkor ők ketten leszállnának.
Ha az első $n-1$ állomáson nem szállt le senki, akkor mindenki tudja, hogy legalább n ember arca kormos, így ha valaki csak $n-1$ kormos arcot lát, tudja, hogy le kell szállni a következő állomáson (összesen n ember fog tehát leszállni).

6. A és B állítása ellentmond egymásnak, ezért ők nem lehetnek mindketten lovagok.
Ha C „Nem"-et válaszolt Craig kérdésére, akkor a következő lehet:
Ha C lókötő, akkor nem igaz az, hogy ők hárman nem ugyanolyan típusúak. Vagyis mindhárman lókötők, így A az áruló.
Ha C lovag, akkor A vagy B lókötő (esetleg mindketten), ezért hármuk közül bárki lehet az áruló.
De C válasza után Craig már tudott mondani valakit, aki ártatlan, ezért ez az eset nem lehet.
Ha C „Igen"-t válaszolt:
Ha C lókötő, akkor ők hárman nem egyforma típusúak. Ezért A vagy B biztosan lovag, tehát B vagy C lehet az áruló.
Ha C lovag, akkor mindhárman lovagok lennének, ez azonban nem lehet.
Így C válasza után a felügyelő már tudja, hogy A ártatlan, és hogy C lókötő. Az is kiderült, hogy ha B lovag, akkor C az áruló, és ha B lókötő, akkor ő az áruló.
Ekkor a lehetséges esetek:
Ha B lovag és a felügyelő őt kérdezi, hogy egyforma típusúak-e, „Nem"-mel fog válaszolni. Ha C-t kérdezi, „Igen" választ fog kapni.
Ha B lókötő, akkor a felügyelőnek mindketten azt fogják hazudni, hogy nem egyforma típusúak.
Ezért a felügyelő csak úgy tudta megtalálni az árulót, ha „Igen"-t kapott válaszul, és ekkor C az áruló, aki lókötő. (Az elsőként elengedett A lókötő, míg B lovag.)

7. Abból, hogy az illető azt hitte, hogy ő nappali típusú és ébren van, csak annyi következik, hogy ő nem éjszakai típusú, aki aludt. Így három lehetőség van:
- Éjszakai típusú, és ébren volt (és hiedelme hamis).
- Nappali típusú, és aludt (és hiedelme hamis).
- Nappali típusú, és ébren volt (és hiedelme igaz).

Ha elárulnák a matematikusnak, hogy az illető éjszakai típusú, el tudná dönteni, hogy az illető ébren volt-e, viszont ha azt mondanák neki, hogy nappali típusú, nem tudná a helyes választ kitalálni. Ezért ha a kérdésére „Nem" a válasz, tudná, hogy az illető nappali típusú, de nem tudná, hogy ébren volt-e vagy aludt. Így csak az lehet, hogy a válasz „Igen" volt, és a matematikus rájött, hogy az illető éjszakai típusú, és ébren volt.

8. Abból, hogy a hölgy azt gondolta, hogy ő alszik és éjszakai típusú, arra tudunk következtetni, hogy ő nem nappali típusú, aki ébren van. Ezért három lehetőségünk van:
- Éjszakai típusú, és ébren volt (és hiedelme hamis).
- Éjszakai típusú, és alszik (és hiedelme igaz).
- Nappali típusú, és alszik (és hiedelme hamis).

Az első matematikus kérdésére a válasz csak „Nem" lehetett, különben ki tudta volna találni, hogy a hölgy nappali típusú, és alszik. Tehát a hölgy csak éjszakai típusú lehet.
A második matematikus kérdésére a válasz szintén csak „Nem" lehetett, különben rájött volna, hogy a hölgy éjszakai típusú, és ébren van. Így a hölgy biztosan alszik.
Tehát csak az lehet, hogy a hölgy éjszakai típusú, és alszik.

9. Elek az összegből nem tudja kitalálni, hogy mi a két gondolt szám; ezért az összeg legfeljebb 36, különben tudná, hogy a kisebbik szám 2. (Hiszen a szorzat 100-nál kisebb.) Arra is rájön, hogy a két szám nem lehet két prím, valamint egy prím és a négyzete. (Ekkor ugyani Zoltán rájönne, hogy mi a két gondolt szám.)
Ezért Elek csak a következő számokat hallhatta: 11, 17, 28, 29, 30, 35, 36. (Nem kell kizárnunk a 28-at és a 30-at, mert ezeknél a két prím szorzata 100-nál nagyobb.)
35 nem lehet az összegek közt, mert ekkor a két gondolt szám 2 és 33, vagy 3 és 32. A 2 és 33 esetén a szorzat 66, de $66 = 6 \cdot 11$ és a $6 + 11 = 17$ is szerepel a listán, így Zoltán nem tudná kitalálni a számokat. 3 és 32 esetén pedig $96 = 4 \cdot 24$, és $4 + 24 = 28$ is ott van a listán, tehát ekkor sem tudná kitalálni a két számot.
Elek nem hallhatta a 11, 17, 28, 29, 30, 36 számokat, mert ekkor Zoltán ki tudná találni

a számokat, Elek viszont még nem. Ugyanis ezeknél a számoknál lesz két olyan felbontás is, amelyekből Zoltán rájöhet a szorzatból a számokra. (A számok felbontásai: $11 = 2 + 9 = 3 + 8$; $17 = 3 + 14 = 7 + 10$; $29 = 2 + 27 = 3 + 26$; $30 = 2 + 28 = 3 + 27$; $36 = 2 + 34 = 3 + 33$.)

Így csak egyetlen szám maradt, a 28. A $28 = 2 + 26$ felbontás mellé az 52 lesz a szorzat, de $52 = 4 \cdot 13$ is lehet, ekkor $4 + 13 = 17$ is szerepel a listán, tehát Zoltán nem tudna dönteni. A 4, 26 felbontás mellé a $3 + 32 = 25$ tartozik azonos szorzattal, ekkor sem dönthetők el, hogy mik a gondolt számok. Végül a 3, 25 felbontás esetén a 5, 15 pár tartozik még ehhez a szorzathoz, viszont az $5 + 15 = 20$ nincs a listán.

A két gondolt szám tehát a 3 és a 25 volt.

10. Jelöljük A-val a vádlottat, B-vel a védőügyvédet, C-vel az ügyészt.

A felügyelő érkezése előtt a következőket tudhatjuk: A nem lehet lókötő, mert ekkor az állítása hamis lenne, vagyis ő lenne a bűnös, de lókötő nem tehette. Másodszor A és B ugyanazt állítják, tehát nem lehet, hogy az egyikük lovag, a másik lókötő, ezért az ügyész nem lehet normális.

Így három lehetőségünk van:

A lovag; B normális; C lókötő. Ekkor A ártatlan, hiszen igaz az állítás, hogy nem bűnös; és C sem bűnös, mert lókötő. Vagyis csak B lehet a bűnös. Vizsgáljuk meg, hogy mit válaszolhattak ekkor a felügyelőnek. C a hozzá intézett kérdésre azt fogja mondani, hogy bűnös (mert hazudik), A pedig ártatlannak mondja C-t

A normális; B lovag; C lókötő. Ekkor A ártatlan (B állítása miatt); és C sem bűnös, mert lókötő. Tehát megint csak B lehet a bűnös. Ebben az esetben C megint bűnösnek vallja magát, A pedig bűnösnek vagy ártatlannak mondja C-t, attól függően, hogy milyen kedve van.

A normális; B lókötő; C lovag. Ekkor A a bűnös (C állítása miatt). Craig felügyelő kérdésére C megmondja, hogy ártatlan, A pedig vagy bűnösnek, vagy ártatlannak mondja az ügyészt.

Mivel a felügyelő az első kérdés után még nem tudott mindent, ezért C nem mondhatta magáról, hogy ártatlan, vagyis az első két eset lehet. A az első és a második esetben is ártatlannak mondhatja C-t, és így nem tudna a felügyelő dönteni. Tehát csak az lehet, hogy a második kérdésre A azt válaszolta, hogy C bűnös.

Így A normális, B lovag, C lókötő, és B a bűnös.

11. Jelöljük csupa nagybetűvel a komódon lévő címkét, csupa kisbetűvel a benne lévő köveket. (pl. SSS azt jelenti, hogy a komódon lévő címke szerint három smaragd van benne)

Mivel az első ember két smaragdot talált, és tudta, mi a harmadik, ezért vagy SSS volt a jel, és ssr volt a komódban; vagy SSR volt a jel, és sss volt a komódban.

A második ember egy smaragdot és egy rubint talált, és tudta mi a harmadik, ezért vagy SSR volt a címkén, és srr volt a komódban; vagy SRR volt a jel, és ssr volt a komódban.

A harmadik két rubint talált, és így két lehetőség van:

Tudta, mi a harmadik, ezért SRR vagy RRR volt a címkén. Ekkor két megoldás is van:

A harmadikon SRR és benne rrr. Másodikon SSR és benne srr. A elsőn SSS és benne ssr. A negyediken RRR és benne sss.

A harmadikon RRR és benne srr. A másodikban ssr és rajta SRR. Az elsőben sss és rajta SSR. A negyediken SSS és benne rrr.

Ekkor a kísérlet vezetője nem tudná, hogy kinél melyik felirat és milyen kövek vannak.

Nem tudta, hogy mi a harmadik, ezért SSS vagy SSR volt a címkén. Ekkor RRR csak a negyedik komódon lehet. Csak a harmadik komódban lehet rrr, mert az első kettőben volt smaragd, a negyedikben pedig a felirat miatt nem lehet. SRR csak a másodikon lehet, így ebben csak ssr lehet. Ezért az első komódban csak sss lehet, a rajta lévő felirat pedig SSR. Végül a negyedik komódban srr van, és a harmadikon az SSS címke.

Irodalom

[1] Bergengóc példatár. TYPOTEX Kiadó 1999.

[2] Róka Sándor: Prímszámok. Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.

[3] Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek? TYPOTEX Elektronikus Kiadó Kft. 1996.

[4] Raymond Smullyan: A hölgy vagy a tigris? és egyéb logikai feladatok. TYPTEX Kiadó, 1997.

[5] Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye. TYPOTEX Elektronikus Kiadó Kft., 1999.

Új tankönyvek a 2005/2006-os tanévre
Sokszínű matematika tankönyvcsalád
Középiskolás matematika tankönyvek
9-12. évfolyam

(Szerzők: Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, dr. Urbán János, Vincze István)

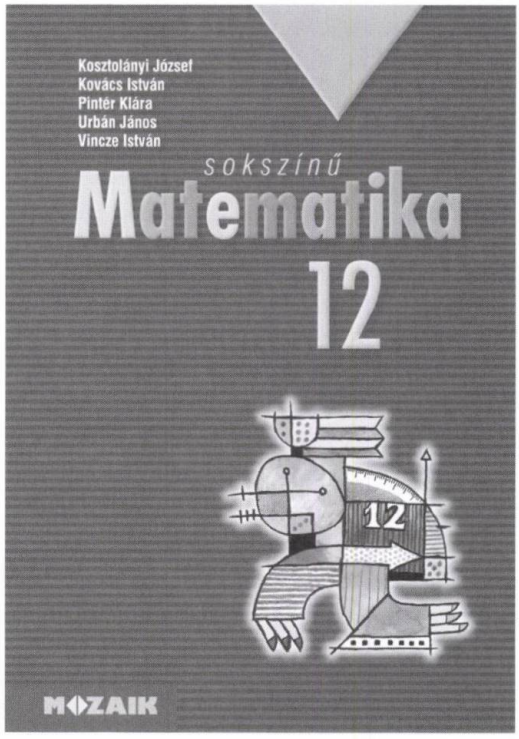
Vannak olyan tantárgyak, amelyek jellegüknél fogva elsősorban lexikális ismereteinket gyarapítják. Az óra anyagát a tankönyvből bármikor fel lehet idézni, a tanári magyarázat ugyanis ezek alapján épül fel. Egy idegen nyelv tanulása során az adott lecke teljes egészében kitölti az órai munkát, a hozzá kapcsolódó gyakorlatok pedig minden esetben alapot szolgáltatnak az otthoni gyakorlásokhoz és a megtanulandó anyagrészek rögzítéséhez.

Ezzel szemben vannak olyan tárgyak – és ezek között a legmarkánsabb a matematika –, melyek problémák nélkül nem taníthatók. Arról szól szinte minden fejezete, hogy az emberiség története során felmerült kérdéseket milyen módon sikerült megoldani. Ezt a felmerülő problémák ismerete nélkül nem lehet megtanítani.

Pólya György így ír erről: *„Minden ismeretünknek tárgyi tudás és gondolkodási készség az alapja. Ha valódi és alapos ismeretünk van a matematikai munka bármely fokáról, legyen az elemi vagy felső fokú, kétségtelenül világossá válik, hogy a matematikában a gondolkodási készség sokkal fontosabb, mint a tárgyi ismeretek elsajátítása. Ennélfogva a középiskolában csakúgy, mint bármely más szinten, bizonyos mennyiségű tárgyi tudás megtanításán kívül bizonyos irányú gondolkodási készséget is fejlesztenünk kell."*

A most teljessé vált Sokszínű matematika 9-12. tankönyvcsalád tervezése során e gondolatok alapján fogalmazódott meg a cél, hogy milyen tankönyvet szeretnénk a kollégák kezébe adni. A legfontosabb szempontok a következők voltak:

- A könyv feleljen meg a kerettanterv előírásainak. Természetesen figyelembe véve azt a lehetőséget is, hogy az adott iskolatípusokban felhasználható óraszámok eltérhetnek, hiszen ez a helyi pedagógiai programok függvénye. Vagyis lehetősége legyen a könyv használatára az alapóraszám felett tanítóknak is, de egyértelmű legyen a megtanítandó tananyag mindenki számára.
- Az egyes fogalmak, témakörök ismertetése legyen minél egyszerűbb, lehetőleg kerülve



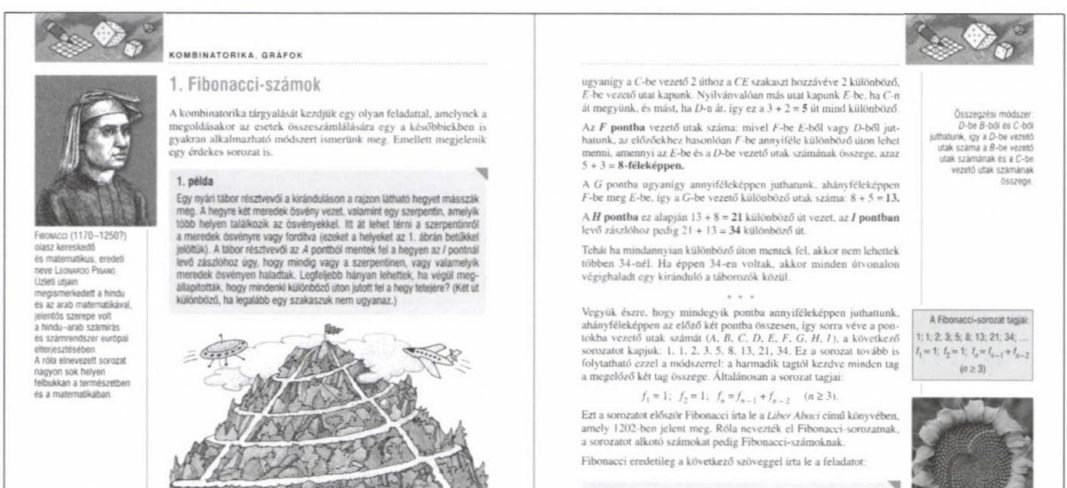
a terjengős magyarázatokat. A felhasznált mintapéldák ezek elmélyítését szolgálják.

- A fejezetekhez szervesen kapcsolódjon olyan minőségű és mennyiségű feladatanyag, amely a begyakorlásra és az otthoni munka megszervezésére is alkalmas. Ezek tegyék lehetővé a megfelelő algoritmusok kialakítását, ugyanakkor a jobb képességű diákok is találhassanak nekik megfelelő feladatokat.
- A tankönyvet használó tanárok kapjanak megfelelő háttéranyagot az órai munkán kívül az otthoni feladatok kijelöléséhez is. A matematika története az emberiség kultúrtörténetének szerves része, ezért a megfelelő fejezeteknél mutassuk be a legjelesebb matematikusokat és azok munkásságát.
- Végül, de nem utolsó sorban a könyv legyen „szimpatikus" a megcélzott korosztály számára. Feladatai között szerepeljenek olyanok, amelyek felkeltik a diákok érdeklődését és önálló munkára sarkalják őket. Szerkezete legyen könnyen áttekinthető, küllemében legyen esztétikus.

Reméljük, hogy ezen elképzelések nem csak az elmélet síkján maradtak meg, hanem valóban realizálódtak is a megjelent tankönyvekben. A törekvésünk mindenesetre ez volt!

A könyv létrehozása során volt még egy nagyon lényeges elv, melyhez igyekeztünk tartani magunkat. A matematikatanár nem szorítkozhat pusztán csak a tárgyi tudás közlésére, hanem módot kell találni annak alkalmazására is. A gondolkodás fejlesztése nem merülhet ki a formalizmusban, nemcsak axiómákból, definíciókból és bizonyításokból áll. A lehetőségekhez képest teret kell engedni a tapasztalás, az önálló felismerés fogalomformáló erejének. Egy könyv ugyan mindezeket önmagában nem képes létrehozni, de alapot adhat a munkához.

Azt szeretnénk, ha diákjaink értenék és okosan alkalmaznák mindazt, amit velük megtanítani igyekszünk. Egy dolgot semmiképpen nem kerülhetünk ki. Építkeznünk kell, tudatosan és célirányosan. Figyelnünk kell rá, hogy a tanulás során hagyjunk időt a tanulás klasszikus fázisaira. Legyen elegendő idő a szemlélődésre a tapasztalatszerzésre. Ez adhat megfelelő alapot a fogalomalkotásra, és teremtheti meg azt a gondolkodásmódot, mely a tantárgy lényegét jelenti.



KOMBINATORIKA, GRÁFOK

1. Fibonacci-számok

A kombinatorika tárgyalását kezdjük egy olyan feladattal, amelynek a megoldásakor az esetek összeszámlálására egy a későbbiekben is gyakran alkalmazható módszert ismerünk meg. Emellett megjelenik egy érdekes sorozat is.

1. példa

Egy nyári tábor résztvevői a kiránduláson a rajzon látható hegyet mászzák meg. A hegyre két meredek ösvény vezet, valamint egy szerpentin, amelyik több helyen találkozik az ösvényekkel. Itt át lehet térni a szerpentinről a meredek ösvényre vagy fordítva (ezeket a helyeket az 1. ábrán betűkkel jelöltük). A tábor résztvevői az *A* pontból mentek fel a hegyen az *I* pontnál levő zászlóhoz úgy, hogy mindig vagy a szerpentinen, vagy valamelyik meredek ösvényen haladtak. Legfeljebb hányan lehettek, ha végül megállapították, hogy mindenki különböző úton jutott fel a hegy tetejére? (Két út különböző, ha legalább egy szakaszuk nem ugyanaz.)

Megoldás

Az *A* pontból indulva vizsgáljuk meg, hogy hányféleképpen juthatunk a betűkkel jelzett pontokba. Írjuk minden pont mellé az odavezető utak számát. *(1. ábra)*

A ***B* pontba** csak a szerpentinen mehetünk, azaz **1-féleképpen** juthatunk el.

A ***C* pontba** mehetünk *A*-ból a meredek ösvényen vagy *B*-ből a szerpentinen, ez **2 lehetőség.**

A *D* **pontba** mehetünk *C*-ből a szerpentinen vagy *B*-ből a meredeken. Mivel *C*-be 2-féleképpen juthattunk, így ehhez a 2-féle *C*-be vezető úthoz a *CD* szakaszt hozzávéve kétféle *D*-be vezető utat kapunk. *B*-be csak 1 út vezetett, így *B*-n keresztül csak 1 út vezet *D*-be, vagyis *D*-be összesen 2 + 1 = **3-féleképpen** juthatunk.

Az ***E* pontba** juthatunk *D*-ből vagy *C*-ből. A *D*-be vezető 3 úthoz a *DE* szakaszt hozzávéve 3 különböző, *E*-be vezető utat kapunk, ugyanígy a *C*-be vezető 2 úthoz a *CE* szakaszt hozzávéve 2 különböző, *E*-be vezető utat kapunk. Nyilvánvalóan más utat kapunk *E*-be, ha *C*-n át megyünk, és mást, ha *D*-n át, így ez a 3 + 2 = **5** út mind különböző.

Az ***F* pontba** vezető utak száma: mivel *F*-be *E*-ből vagy *D*-ből juthatunk, az előzőekhez hasonlóan *F*-be annyiféle különböző úton lehet menni, amennyi az *E*-be és a *D*-be vezető utak számának összege, azaz 5 + 3 = **8-féleképpen.**

A *G* pontba ugyanígy annyiféleképpen juthatunk, ahányféleképpen *F*-be meg *E*-be, így a *G*-be vezető különböző utak száma: 8 + 5 = **13.**

A ***H* pontba** ez alapján 13 + 8 = **21** különböző út vezet, az ***I* pontban** levő zászlóhoz pedig 21 + 13 = **34** különböző út.

Tehát ha mindannyian különböző úton mentek fel, akkor nem lehettek többen 34-nél. Ha éppen 34-en voltak, akkor minden útvonalon végighaladt egy kiránduló a táborozók közül.

* * *

Vegyük észre, hogy mindegyik pontba annyiféleképpen juthattunk, ahányféleképpen az előző két pontba összesen, így sorra véve a pontokba vezető utak számát (*A, B, C, D, E, F, G, H, I*), a következő sorozatot kapjuk: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Ez a sorozat tovább is folytatható ezzel a módszerrel: a harmadik tagtól kezdve minden tag a megelőző két tag összege. Általánosan a sorozat tagjai:

$$f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Ezt a sorozatot először Fibonacci írta le a *Liber Abaci* című könyvében, amely 1202-ben jelent meg. Róla nevezték el Fibonacci-sorozatnak, a sorozatot alkotó számokat pedig Fibonacci-számoknak.

Fibonacci eredetileg a következő szöveggel írta le a feladatot:

2. példa

Egy nyulpármak havonta egyszer születik kölyke, egy hím és egy nőstény. A kölykök születésük után két hónappal kölykeznek először. Hány nyulunk lesz az év végén, ha az év elején egy párunk volt, és ezek az első hónap végén még nem kölykeznek?

Megoldás

Az **év elején** egy pár nyúl van, amelyek az előző hónap végén születtek:

$$f_1 = 1.$$

Az **első hónap végén** ugyanez az egy pár nyúl van, mert csak születésük után két hónappal kölykeznek:

$$f_2 = 1.$$

A **második hónap végére** megszületik egy újabb nyúlpár, így

$$f_3 = 2.$$

Összegzési módszer: *D*-be *B*-ből és *C*-ből juthatunk, így a *D*-be vezető utak száma a *B*-be vezető utak számának és a *C*-be vezető utak számának összege.

A Fibonacci-sorozat tagjai: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ... $f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$

A Fibonacci-sorozat számtalan helyen felfedezhető a természetben. A napraforgó tányérján a bárra és a jobbra vezető spirálkarok száma általában két egymást követő Fibonacci-szám, a képen például 21 és 34. Hasonló megfigyeléseket lehetünk az ananasz gyümölcsén, különböző kaktuszokon, fenyőtobozokon stb.

Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy ezzel a tudományterülettel részei vagyunk egy komplex ismeretanyagnak, melyben akkor vívjuk ki a bennünket megillető helyet, ha tisztelettel fordulunk a rokon diszciplínák felé. Ezekre hívjuk is fel diákjaink figyelmét!

Gonzalo Sanchez Vazquez

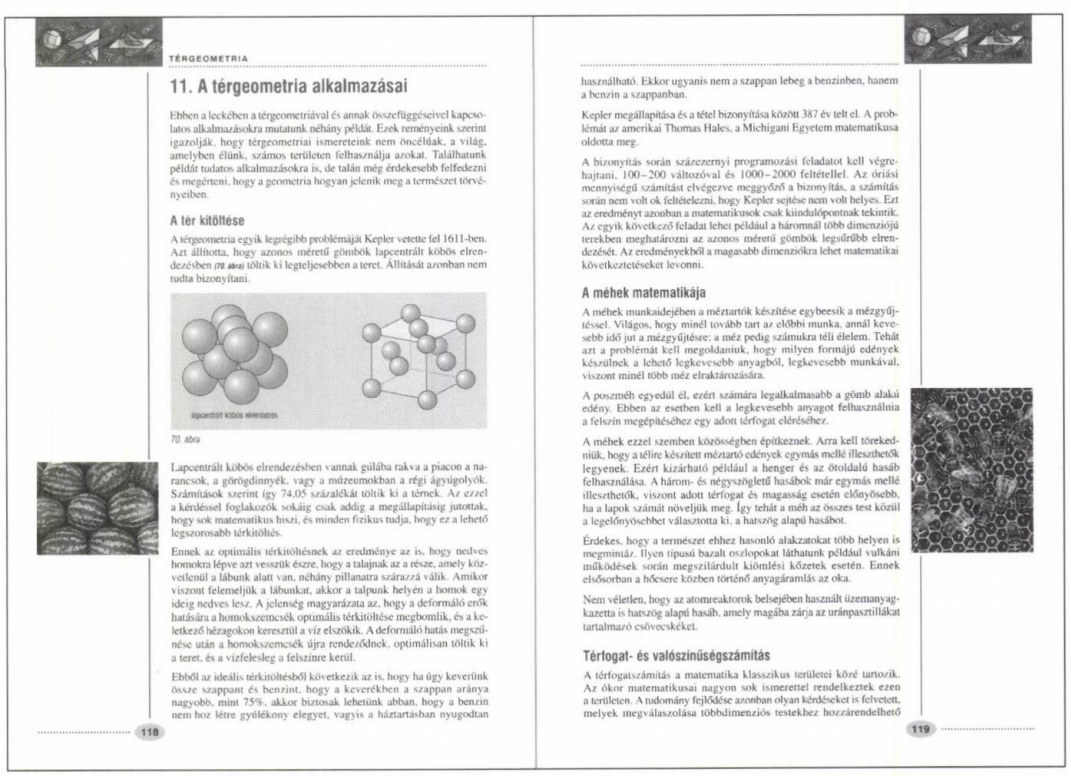
Matematika és költészet

Nézd, e számok szüntelenül nőnek és nőnek:
0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999;...
mind jobban közelítvén az isteni egységet,
meg-megsimítják, de mégsem érik el:
e számsorozat ekként költészet is egyben.
Akár a véget nem érő, kitartó rímek,
mint a soha véget nem érő vágy,
mint a közeli és mégis elérhetetlen horizont.
Háromszögek, körök, poligonok,
ellipszisek, hiperbolák, parabolák
visszhangzanak bennünk Euklidesz óta
mint absztrakt geometriai formák,
velünk élő ideális formák,
mivel a szerelemben is van háromszög,
és az égen a szivárvány körző nélkül rajzolódik.
A nyelv és a geometria létében párhuzamos,
hiszen a szóbeli hazugság rejtett ellipszis,
a szentkönyvek parabolákban szólnak,
hiperbolákat vetít ránk az epika.
Számok és formák, képek és ritmusok,
rend és fény a versben és a teorémában,
a harmónia felfokozott érintése teszi, hogy
együtt vagytok az idő emlékezetében,
együtt léteztek, matematika és költészet.

(Horváth Zsuzsa és Tompa Klára fordítása)

Azt kívánjuk, hogy ezek a könyvek legyenek hasznos társai az időnként problémáival egyedül maradó, új évezrednek induló, matematikát tanító pedagógus társadalomnak.

Végezetül egy Anatole France idézetre hívnám fel minden tanár kollégám figyelmét, melynek megszívlelése bizonyára sokat segítene az időnként kemény pengeváltásokra kényszerülő, tantárgyai érdekeit védelmezni vélők lelki állapotán: *„Ne próbáljuk kielégíteni a hiúságunkat azzal, hogy nagyon sok mindenre tanítjuk meg őket. Ébresszük fel tudásszomjukat. Elegendő megnyitnunk az értelmüket, nem szabad túlterhelnünk őket. Csak egy szikrát csiholjunk. Ha elég gyúlékony az anyag, akkor majd tüzet fog."*



TÉRGEOMETRIA

11. A térgeometria alkalmazásai

Ebben a leckében a térgeometriával és annak összefüggéseivel kapcsolatos alkalmazásokra mutatunk néhány példát. Ezek reményeink szerint igazolják, hogy térgeometriai ismereteink nem öncélúak, a világ, amelyben élünk, számos területen felhasználja azokat. Találhatunk példát tudatos alkalmazásokra is, de talán még érdekesebb felfedezni és megérteni, hogy a geometria hogyan jelenik meg a természet törvényeiben.

A tér kitöltése

A térgeometria egyik legrégibb problémáját Kepler vetette fel 1611-ben. Azt állította, hogy azonos méretű gömbök lapcentrált kötös elrendezésben (*70. ábra*) töltik ki legteljesebben a teret. Állítását azonban nem tudta bizonyítani.

70. ábra

Lapcentrált köbös elrendezésben vannak gúlába rakva a piacon a narancsok, a görögdinnyék, vagy a múzeumokban a régi ágyúgolyók. Számítások szerint így 74,05 százalékát töltik ki a térnek. Az ezzel a kérdéssel foglalkozók sokáig csak addig a megállapításig jutottak, hogy sok matematikus hiszi, és minden fizikus tudja, hogy ez a lehető legszorosabb térkitöltés.

Ennek az optimális térkitöltésnek az eredménye az is, hogy nedves homokra lépve azt vesszük észre, hogy a talajnak az a része, amely közvetlenül a lábunk alatt van, néhány pillanatra szárazzá válik. Amikor viszont felemeljük a lábunkat, akkor a talpunk helyén a homok egy ideig nedves lesz. A jelenség magyarázata az, hogy a deformáló erők hatására a homokszemcsék optimális térkitöltése megbomlik, és a keletkező hézagokon keresztül a víz elszökik. A deformáló hatás megszűnése után a homokszemcsék újra rendeződnek, optimálisan töltik ki a teret, és a vízfelesleg a felszínre kerül.

Ebből az ideális térkitöltésből következik az is, hogy ha úgy keverünk össze szappant és benzint, hogy a keverékben a szappan aránya nagyobb, mint 75%, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a benzin nem hoz létre gyúlékony elegyet, vagyis a háztartásban nyugodtan használható. Ekkor ugyanis nem a szappan lebeg a benzinben, hanem a benzin a szappanban.

Kepler megállapítása és a tétel bizonyítása között 387 év telt el. A problémát az amerikai Thomas Hales, a Michigani Egyetem matematikusa oldotta meg.

A bizonyítás során százezernyi programozási feladatot kellett végrehajtani, 100–200 változóval és 1000–2000 feltétellel. Az óriási mennyiségű számítást elvégezve meggyőző a bizonyítás, a számítás során nem volt ok feltételezni, hogy Kepler sejtése nem volt helyes. Ezt az eredményt azonban a matematikusok csak kiindulópontnak tekintik. Az egyik következő feladat lehet például a háromnál több dimenziójú terekben meghatározni az azonos méretű gömbök legsűrűbb elrendezését. Az eredményekből a magasabb dimenziókra lehet matematikai következtetéseket levonni.

A méhek matematikája

A méhek munkaidejében a méztartók készítése egybeesik a mézgyűjtéssel. Világos, hogy minél tovább tart az előbbi munka, annál kevesebb idő jut a mézgyűjtésre; a méz pedig számukra téli élelem. Tehát azt a problémát kell megoldaniuk, hogy milyen formájú edények készülnek a lehető legkevesebb anyagból, legkevesebb munkával, viszont minél több méz elraktározására.

A poszméh egyedül él, ezért számára legalkalmasabb a gömb alakú edény. Ebben az esetben kell a legkevesebb anyagot felhasználnia a felszín megépítéséhez egy adott térfogat eléréséhez.

A méhek ezzel szemben közösségben építkeznek. Arra kell törekedniük, hogy a télire készített méztartó edények egymás mellé illeszthetők legyenek. Ezért kizárható például a henger és az ötoldalú hasáb felhasználása. A három- és négyszögletű hasábok már egymás mellé illeszthetők, viszont adott térfogat és magasság esetén előnyösebb, ha a lapok számát növeljük meg. Így tehát a méh az összes test közül a legelőnyösebbet választotta ki, a hatszög alapú hasábot.

Érdekes, hogy a természet ehhez hasonló alakzatokat több helyen is megmintáz. Ilyen típusú bazalt oszlopokat láthatunk például vulkáni működések során megszilárdult kiömlési kőzetek esetén. Ennek elsősorban a hőcsere közben történő anyagáramlás az oka.

Nem véletlen, hogy az atomreaktorok belsejében használt üzemanyagkazetta is hatszög alapú hasáb, amely magába zárja az uránpasztillákat tartalmazó csövecskéket.

Térfogat- és valószínűségszámítás

A térfogatszámítás a matematika klasszikus területei közé tartozik. Az ókor matematikusai nagyon sok ismerettel rendelkeztek ezen a területen. A tudomány fejlődése azonban olyan kérdéseket is felvetett, melyek megválaszolása többdimenziós testekhez hozzárendelhető

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2005. március 31.

Feladatok (265-269.)

265. Mely pozitív egész n számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2}} < 1-\frac{1}{n}$$

266. Számítsuk ki S értékét, ha

$$S=\left[\frac{2^{2006}+1}{2^{2004}+1}\right]+\left[\frac{3^{2006}+1}{3^{2004}+1}\right]+\ldots+\left[\frac{2005^{2006}+1}{2005^{2004}+1}\right].$$

($[x]$ az x-nél nem nagyobb, legnagyobb egész számot jelöli.)

267. x, y és z olyan pozitív valós számok, amelyekre $xyz(x+y+z)=1$. Határozzuk meg az $(x+y)(y+z)$ minimumát.

268. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan páronként különböző pozitív egészekből álló $(x; y; u; z)$ számnégyes létezik, amely kielégíti a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x^{2004}+y^{2005}&=u^2\\ x^{2005}+y^{2004}&=v^{2004}\end{aligned}\right\}$$

Dályay Pál Péter, Szeged

269. Adjuk meg mindazokat az $f: Q \to Q$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely racionális x és y esetén $f(x+f(y))=f(x)\cdot f(y)$.

Feladatmegoldások (250-254. feladatok)

250. Mely pozitív egész m és n esetén lesz egy egész szám négyzete a 3^m+3^n+1 kifejezés értéke?

Megoldás: Tegyük fel, hogy van megfelelő négyzetszám. Mivel 3^m+3^n+1 páratlan, ezért a feltevésünknek megfelelően valamely egész k esetén $3^m+3^n+1=(2k+1)^2$, ahonnan $3^m+3^n=4k(k+1)$, ami azt jelenti, hogy 3^m+3^n osztható 8-cal.

Mivel azonban 3^{2l} 1, míg 3^{2l+1} 3 maradékot ad 8-cal osztva minden l természetes szám esetén, ezért 3^m+3^n nem lehet 8-cal osztható. A kapott ellentmondásból következik, hogy nincs olyan pozitív egész m és n, amelyre 3^m+3^n+1 négyzetszám.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 7.

251. Bontsuk fel a pozitív egészek halmazát tetszőleges módon két diszjunkt részhalmazra. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n esetén vannak olyan a és b pozitív egészek, amelyek mindegyike nagyobb n-nél, és az a, b, $a+b$ számok mindegyike ugyanabban a részhalmazban van.

Megoldás: Jelölje a két diszjunkt részhalmazt A és B. Ha valamelyik véges, akkor az állítás triviálisan teljesül, ugyanis valahonnan kezdve az összes pozitív egész szám az egyik részhalmazban van.

Legyenek a továbbiakban A és B a feltételnek megfelelő végtelen részhalmazok, és legyen n tetszőleges, de rögzített pozitív egész. A továbbiakban arra törekszünk, hogy „elrontsuk a dolgot", azaz úgy próbálunk két végtelen részhalmazt konstruálni, hogy ne teljesüljön rájuk a feladat állítása.

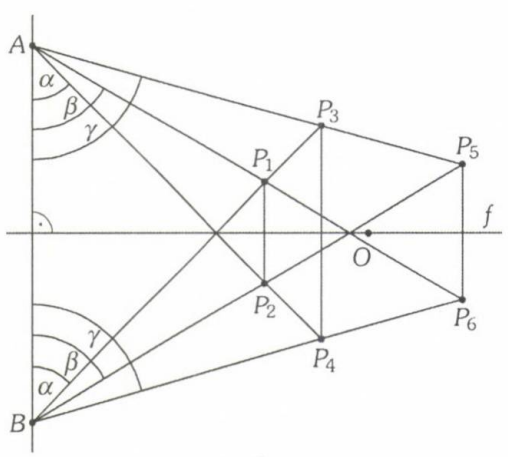
Legyen a, $b \in A$, és $n < a < b$. Ekkor $a + b \in B$. Ha $b - a$ elég nagy, azaz $b - a > n$, akkor a, $b - a$, b megfelelő hármas lenne, ha $b - a \in A$ teljesülne, ezért $b - a \in B$ legyen. Így viszont a „rontáshoz" kell, hogy $2a$ A-ban legyen, ugyanis $(b - a) + 2a = a + b$. Hasonló okok miatt $3a$ B-ben kell, hogy legyen. Így $A = \{..., a, b, 2a, ...\}$ és $B = \{..., a + b, b - a, 3a, ...\}$. Viszont ekkor $2a + b$ sem A-ba, sem B-be nem rakható, ami ellentmond annak, hogy a két részhalmaz uniója a pozitív egészek halmaza.
Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

252. A, B, P_1, ..., P_6 a sík nyolc különböző pontja úgy, hogy a P_i pontok mindegyike az AB egyenes ugyanazon oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ha a P_iAB háromszögek páronként hasonlók, akkor a P_1, ..., P_6 pontok egy körre illeszkednek.

Megoldás: A feladat feltételeiből (P_iAB háromszögek hasonlósága, P_i pontok különbözősége) következik, hogy a hat háromszög az *1. ábrán* látható módon helyezkedik el, ahol f az AB, P_1P_2, P_3P_4 és P_5P_6 szakaszok közös felező merőlegese, α, β, γ pedig az egymással hasonló háromszögek egymástól páronként különböző belső szögei.
Tekintsük a $P_1P_2P_4P_6$ négyszöget. A BAP_2 és az AP_2P_1 szögek váltószögek, ezért egyenlők, azaz $BAP_2\sphericalangle = AP_2P_1\sphericalangle = \alpha$.



1. ábra

Az ábráról leolvasható, hogy $P_4P_6P_1\sphericalangle = \alpha$, amiből adódik, hogy a $P_1P_2P_4P_6$ négyszög húrnégyszög. Ezen négyszög köréírt körének O középpontja illeszkedik f-re, és

$$OP_1 = OP_2 = OP_4 = OP_6.$$

Viszont f merőlegesen felezi a P_3P_4 és P_5P_6 szakaszokat is, ezért $OP_3 = OP_4$ és $OP_5 = OP_6$. Ez azt jelenti, hogy az O ponttól mindegyik P_i pont egyenlő távolságra van, azaz ugyanazon O középpontú körre illeszkednek.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

253. Egy toronyóra nagymutatója 4 m, kismutatója 3 m hosszú. Mekkora a mutatók végpontjai közötti távolság abban a pillanatban, amikor a végpontok leggyorsabban távolodnak egymástól?

Megoldás: $\omega = 2\pi$ rad/h a nagymutató szögsebessége, míg a kismutatóé ennek 12-ed része. Induljunk ki egy olyan helyzetből, amikor a végpontok távolsága a legkisebb, azaz a nagymutató fedi a kismutatót. Jelölje $\theta(t)$ a két mutató szögének mértékét radiánban t óra eltelte után, vagyis $\theta(t) = \frac{11\pi}{6}t$. A két végpont közötti távolság ekkor a koszinusztétel alapján

$$d(t) = \sqrt{25 - 24\cos\theta(t)}.$$

A távolság akkor nő a leggyorsabban, ha a $d(t)$ függvény deriváltja maximális.
Az első és a második derivált:

$$d'(t) = 22\pi\frac{\sin\theta(t)}{d(t)},$$

$$d''(t) = \frac{121\pi^2}{3d^3(t)}(-12\cos^2\theta(t) + 25\cos\theta(t) - 12).$$

A második derivált akkor 0, ha $\cos\theta(t) = \frac{3}{4}$.

Könnyen látható, hogy $d'(t)$ ekkor valóban maximális, és $d(t) = \sqrt{7}$ m.

Megjegyzés: Ugyanekkora a távolság a két végpont között akkor is, amikor a távolság a leggyorsabban csökken.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 4.

254. Adott a síkon n pont ($n \geq 2$). Legyen d a legkisebb, D a legnagyobb a pontpárok által meghatározott távolságok közül. Igazoljuk, hogy

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{n} - 1) \cdot d.$$

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség így is írható:

$$\frac{D}{d} > \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{n} - 1), \text{ ha } n \geq 2. \qquad (1)$$

$D \geq d$, ezért a bal oldal legalább 1. Könnyen látható, hogy $n = 2, 3, 4$ esetén a jobb oldal kisebb 1-nél, így az állítás nyilván igaz. Belátjuk, hogy $n \geq 5$ esetén is teljesül (1).

Legyen az n pont által meghatározott ponthalmaz konvex burka K. Ekkor K egy D átmérőjű alakzat.

V. G. Boltyanszkij – I. C. Gohberg: Alakzatok felbontása kisebb részekre (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.) című könyvecskéjének 9. oldalán szerepel a következő tétel (bizonyítással együtt): Bármely D átmérőjű síkidom befoglalható egy olyan szabályos hatszögbe, melynek szemközti oldalai D távolságra vannak egymástól.

Ezt a tételt felhasználva foglaljuk bele K-t, és vele együtt az n darab pontot egy ilyen H szabályos hatszögbe. Az n pont mindegyike köré szerkesszünk $\frac{d}{2}$ sugarú köröket. A feladat feltétele szerint eme körök közül bármely kettőnek nincs közös belső pontja, így az n darab kör által lefedett terület $T_1 = n \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

Mivel a körök középpontjai benne vannak a H szabályos hatszögben, melynek szemközti oldalai D távolságra vannak egymástól, ezért e körök mindegyikét lefedi az a H' szabályos hatszög, amely úgy keletkezik, hogy H minden oldalát $\frac{d}{2}$ távolsággal eltoljuk „kifelé". H' szemközti oldalainak távolsága így $D + d$. Egy a oldalú szabályos hatszög szemközti oldalainak távolsága $a\sqrt{3}$, így H' oldala $a = \frac{D+d}{\sqrt{3}}$, H' területe pedig $T_2 = 6a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot (D+d)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Mivel H' az n darab kör mindegyikét lefedi, ezért $T_2 > T_1$, azaz

$$2 \cdot (D+d)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} > n \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi.$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal adódik, hogy

$$\frac{D}{d} > \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{n} - 1.$$

Ahhoz, hogy (1)-et igazoljuk $n \geq 5$ esetére, elegendő belátni, hogy

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{n} - 1 > \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{n} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{n} > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ha } n \geq 5.$$

Ez pedig igaz, mert

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{n} > (0{,}95 - 0{,}87) \cdot \sqrt{5} =$$

$$= 0{,}08 \cdot \sqrt{5} > 0{,}17 > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Kiss Zoltán, Pécs
Zachar Zoltán, Tatabánya

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (250-254.); Kamarás Lajos, Pécs (250-252.); Kiss Zoltán, Pécs (250-254.); Nagy Béla, Sarkad (250-252., 254.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (250-252.); Varga Éva, Kecskemét (250., 252.); Varga Nóra, Sarkad (251., 252.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (251-253.).

NAT 2003
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-től kezdődően az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadó által készített kerettantervrendszert az OM akkreditálta, és nyomtatásban megjelent a 17/2004. (V. 20.) rendelet mellékleteként az Oktatási Közlöny 2004/68. számának 593-1488. oldalán. A kerettanterv letölthető az OM honlapjáról, valamint a www.mozaik.info.hu címről.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY
TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Kriptográfia a középiskolában

(Csirmaz László)

Geometriai versenyfeladatok 7-8. osztályosoknak

(Károlyi Károly)

Dr. Gyapjas Ferenc (1935–2005)

(Dr. Ambrus András)

XIII. ÉVFOLYAM 2005 2

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1450 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Kriptográfia a középiskolában
Csirmaz László
egyetemi tanár, Budapest

Geometriai versenyfeladatok 7-8. osztályosoknak
Károlyi Károly
tanár, Bátaszék

Dr. Gyapjas Ferenc (1935–2005)
Dr. Ambrus András
docens, Budapest

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Csirmaz László

Kriptográfia a középiskolában

Az elmúlt évtizedben a kriptográfia – a titkosírás tudománya – mindennapjaink fontos elemévé vált. Az internetes vásárlásról vagy internetes banki szolgáltatásokról természetesen mindenki hallott. De a kriptográfiának nélkülönözhetetlen szerepe van a mobil telefóniában, a kábeltévénél, az elektronikus adóbevallásnál, az egyablakos ügyintézésnél, sőt minden egyes bankkártyával való fizetésnél is. Nagyon fontos tehát, hogy ha nem is részleteiben, de nagy vonalakban a diákok is megismerjék és megértsék a kriptográfiai eljárások mögötti gondolatokat. Ez annál is fontosabb, mert a nagyközönség számára a kriptográfia fekete mágia, amihez csak a beavatottak értenek. Ha mindenki pontosan tudná, mit lehet megcsinálni, mi az, ami szükséges, és mi az, ami szükségtelen, sokkal kevésbé tudnának a nagy rendszerek gazdái (állami hivatalok, nagyvállalatok, bankok) visszaélni a kezükben összpontosuló hatalommal. Ha a biztonságos bankkártyás fizetéshez nincs szükség sem a pin kódra, sem a személyi igazolványra, akkor miért kötelező ezek használata? Ha egy banknak minden eszköz rendelkezésére áll ahhoz, hogy lehetetlenné tegye a jogtalan bankkártya-használatot, akkor miért az ártatlan és gyakran semmiről sem tudó ügyféllel fizetteti meg a bank gondatlanságából származó kárt?

A cikkben több különböző kriptográfiai eljárás modellje szerepel; ezeket egy-egy osztályfoglalkozáson dolgozhatjuk fel. Megpróbáltam rámutatni a lényeges, fontos tulajdonságokra, illetve némi kitekintést is adni az „igazi" módszerekre is.

1. Első titkos üzenet

Elsőként a kulcsegyeztetésről lesz szó, amely a modern kriptográfia egyik első, talán legmeglepőbb alkalmazása. Arról szinte mindenki hallott, hogy hogyan lehet titkos üzeneteket küldeni. A két fél megegyezik valamilyen módszerben, majd megválasztják a titkosíráshoz használt kulcsot, amit mindketten használnak: az egyik a titkosításra, a másik a titkosított üzenet visszafejtésére. Ahhoz tehát, hogy egyáltalán titkos üzeneteket tudjanak egymásnak küldeni, meg kell egyezniük egy közös kulcsban, amit csak ők ketten tudnak. Ezt az eljárást hívják kulcsegyeztetésnek.

A feladat tehát az, hogy ketten, akik korábban soha nem találkoztak, egyezzenek meg egy közös titokban (a kulcsban). Ennek eléréséhez egymásnak üzeneteket tudnak küldeni, de ezeket az üzeneteket bárki le tudja hallgatni.

Hogyan tudják mégis elérni, hogy legyen olyan közös titkuk, amit a lehallgató nem tud kitalálni?

A demonstráláshoz osszuk az osztály tanulóit három csoportba. A két szélső csoport kapja a két fél szerepét, akik egy közös kulcsban akarnak megállapodni, de csak a középsőn keresztül tudnak egymásnak üzenni. A feladat az, hogy az egyik szélső csoport juttasson el egy üzenetet a másik oldalra úgy, hogy a középső társaság ne tudja meg, mi is az üzenet.

A kulcs megállapításához küldött üzenetet egy másfél méteres lánc jelképezi, aminek a két vége a jobb megkülönböztethetőség kedvéért más-más színű. Az üzenetet azzal titkosíthatjuk – azaz más számára értelmezhetetlen zagyvasággá változtathatjuk –, ha a lánc két végét egy lakattal lezárjuk.

Mindhárom csoport kap egy-egy lakatot a hozzá tartozó kulccsal; persze egy lakatot csak a hozzá tartozó kulcs tud kinyitni.

A nyitott láncot az egyik szélső csoport kapja meg, és ezt kell átjuttatnia a másik oldalra. Persze a láncot nem szabad dobni, csak átadni. Sőt, minden lépést előre meg kell beszélni, hogy mindenki (beleértve a középső csoport tagjait is) pontosan tudja, hogy mi fog történni. Közben el kell érni, hogy a középső csoport ne kapja meg a láncot lelakatolatlanul, és ne is tudja egyszer sem kinyitni.

A középső csoport ráadásul mindent „lemásol," ami átmegy a kezén. Ez azt jelenti, hogy a lakat, a kulcs, vagy a lelakatolt lánc képét megtarthatja magának. Ha a lelakatolt lánc képe és a megfelelő kulcs képe is nála van, a láncot kinyithatja, és megnyerte a játékot.

Az nem jó módszer, hogy a láncot az első csoport a saját lakatjával lezárja, a lakat kulcsát átküldi, majd mikor a kulcs megérkezett, a lelakatolt láncot küldi el. Az sem működik, hogy elkéri a másik csoporttól a lakatot a kulccsal együtt, és azzal zárja le a láncot, hiszen ekkor a lakatot nyitó kulcs képe már ott van a középső csoportnál. A megoldás: az első csapat lelakatolja a láncot, és azt így átküldi a harmadiknak. A harmadik felteszi saját lakatját is, majd a láncot a két lakattal visszaküldi. Az első csapat leszedi saját lakatját, és a most már csak a harmadik csapat lakatjával lezárt láncot küldi vissza. Ekkor a harmadik csapat ki tudja nyitni a láncot. A középső csapat nem látott egyetlen kulcsot sem, tehát nem tudja kinyitni a láncot.

A két lakat kinyitása nem a természetes sorrendben történt, hanem „fordítva". A zoknit előbb vesszük fel mint a cipőt, viszont amikor levetkőzünk, előbb a cipőt kell levenni. Ebben az esetben varázslatosan előbb a zokni került le a lábról és csak utána a cipő!

Ez az oka annak, hogy lánc helyett nem használhatunk lelakatolható dobozt, mondjuk a következőképpen. Az első csoport az átküldendő üzenetet egy dobozba teszi, amit lelakatol. A dobozt átküldi a harmadik csoportnak. Ők ezt a dobozt egy nagyobb dobozba teszik, amit ők lakatolnak le. A nagy dobozt, benne a kicsit, és abban az üzenetet visszaküldik az első csoportnak. Most az első csoportnak ki kellene nyitni a saját dobozát – de nem fér hozzá, hiszen az be van zárva a nagy dobozba. A cipő most nem engedi, hogy a zoknit levegyük a lábunkról.

Most képzeljük el, hogy a lánc pontos útjának megbeszélése után a két szélső csoportot külön-külön terembe küldjük, a középső csoport tagjai pedig a folyosón járkálhatnak. A két szélső csoport tagjai a láncot a folyosóra nyíló ajtón adhatják át a középső csoport tagjainak, de azt, hogy azok mit csinálnak a lánccal, már nem látják. Hogyan tudná ezt a lehetőséget a középső csoport kihasználni?

Megtehetik, hogy egyáltalán nem adják tovább a láncot, hanem saját lakatjukat teszik rá, és így adják vissza az első csoportnak. Ők leveszik sajátjukat, és ekkor a középső csoport ki tudja nyitni a láncot. Ha pedig még egy láncuk is van, akkor a középső csoport ezt a másik láncot használva saját lakatjával át tudja adni a harmadiknak, mintha az jött volna az elsőtől.

Ezzel a középső társaság mindkét oldal láncát ki tudja nyitni, a két szélső csoport pedig nem tudja, hogy a másik nem az ő láncát látta.

Hogyan tudná a két szélső csoport elérni, hogy a középsők ne csapják be őket? Nyilván elég, ha mindketten ismerik a másik lakatját. De az is elegendő, ha csak az egyik tudja, milyen lakatja van a másiknak. De mi a helyzet, ha a középső csoport lakatja megszólalásig hasonlít valamelyik szélső csoport lakatjához?

További érdekes lehetőséget jelent, ha egy lakathoz több kulcsunk is van, vagy ha egy kulcs egyszerre több lakatot is ki tud nyitni. Hogyan lehetne ezeket ügyesen felhasználni akár az átvitel biztonságosabbá tételére, akár annak támadására?

Az itt ismertetett eljárás az úgynevezett aszimmetrikus kódolású kulcsegyeztetés protokollja. A két résztvevő – a két szélső csoport – a protokoll végére olyan közös információval rendelkezik (ez a közös titkos kulcs), amiről az üzenetek lehallgatójának (középső csoport) semmi információja nincsen. A további üzenetváltáshoz a résztvevők már az így rendelkezésre álló közös adatot használhatják titkosírási kulcsként.

A protokoll előbb bemutatott támadása – amikor a középső csoport saját lakatját használva az első csoportot becsapja – tulajdonképpen azonosítási probléma. Az első csoport a protokoll végére nem csak azt szeretné tudni, hogy valakinek sikerrel elküldte az információt úgy, hogy közbülső személy nem tudhatta meg annak tartalmát, hanem azt is szeretné tudni, hogy ez a valaki éppen a harmadik csoport, és nem más. A protokoll a bemutatott formájában ezt nem tudja garantálni. Ez a támadás annyira általános, hogy külön neve is van: „valaki középen" (men in the middle). A közkézen forgó történet szerint ugyanezt a módszert használta az a kislány, aki két sakknagymesterrel vívott levelező játszmájának egyikét megnyerte: mindkét ellenfelének lépését elküldte a másiknak, mintha azt ő lépte volna.

2. Csak amit muszáj – milliomosok vetélkedője

Három milliomos találkozik. Beszélgetnek, és egy idő után a pénzre terelődik a szó: kinek mekkora vagyona van. Borzasztóan kíváncsiak, hármójuk közül ki a leggazdagabb, de egyik sem kívánja megmondani a másik kettőnek, hogy mekkora a vagyona. El tudják dönteni ennek ellenére, ki a legvagyonosabb?

A feladat megoldásához egy többrésztvevős protokollt kell terveznünk. Mindegyik résztvevő rendelkezik valamilyen információval, amit nem kíván a többivel megosztani, ugyanakkor mindannyian kíváncsiak egy olyan értékre, amit ezekből az adatokból lehet kiszámítani. A milliomosok az alábbi függvény értékét szeretnék kiszámítani:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq y \text{ és } x \geq z; \\ 2, & \text{ha } x < y \text{ és } y \geq z; \\ 3, & \text{egyébként;} \end{cases}$$

ahol x helyébe az első, y helyébe a második, z helyébe pedig a harmadik milliomos vagyona kerül, hiszen ez a függvény éppen azt mondja meg, amire kíváncsiak. Olyan eljárást keresünk tehát, ami résztvevők adataiból kiszámítja a kért végeredményt, miközben a résztvevők a végeredményen (és az abból levonható következtetéseken) kívül semmi mást nem tudnak meg. A kriptográfia egyik gyönyörű eredménye, hogy ezt el lehet érni. Ha egy hitelfelvételhez igazolnom kell, hogy van rendszeres, adott értéket meghaladó havi jövedelmem, akkor ezt az igazolást úgy is meg lehet tenni, hogy a hitelező ezen az egyetlen információn kívül mást ne tudjon meg – nevezetesen azt sem, hogy ki a munkáltatóm, és pontosan mennyi is a rendszeres jövedelmem. Ezeket szükségtelen tudnia, és a hitelező könnyen visszaélhet ezekkel az adatokkal.

Bemelegítésként nézzünk egy olyan, sokakat izgató feladatot, ami viszonylag egyszerűen megoldható. A feladat: számítsuk ki egy összejövetelen a megjelent hölgyek életkorának átlagát. A probléma az, hogy a hölgyek közül senki sem akarja elárulni, hogy pontosan hány éves. Vagy határozzuk meg, mennyi az osztály zsebpénzének átlaga, amit anélkül kell kiszámítanunk, hogy bárki megmondaná saját zsebpénzének összegét.

A megoldáshoz mindössze egy jegyzettömb és egy ceruza kell. A résztvevő hölgyek közül valaki a jegyzettömb legfelső lapjára írjon fel egy véletlen, mondjuk hatjegyű egész számot anélkül, hogy azt bárki másnak megmutatná. A lapot letépi, és elteszi a zsebébe. Ezután a saját életkorát hozzáadja a véletlen számhoz, felírja a jegyzettömb legfelső lapjára, és továbbadja a következő résztvevőnek.

Mindenki más, amikor megkapja a jegyzettömböt, leveszi a felső lapot, a rajta levő számhoz hozzáadja saját életkorát, és az összeget felírja a jegyzettömb legfelső, üres lapjára. A levett lapot pedig apró fecnikre tépi szét, majd a jegyzettömböt továbbadja a társaság következő tagjának.

Mikor a jegyzettömb már mindenkinél volt, az visszakerül az első résztvevőhöz. Ő levonja az összegből az általa kitalált véletlen számot, és megkapták az életkorok összegét. Ezt már csak el kell osztani a résztvevők számával ahhoz, hogy a keresett átlag meglegyen.

A protokoll természetesen a helyes értéket számítja ki, és biztonságos is, ha a résztvevők becsületesen játszanak: mivel az első hölgy egy nem kitalálható véletlen számot választ, senki sem tud meg semmit a többiek életkoráról. De ha néhány játékos titokban koalícióra lép, többletinformációhoz tudnak jutni. Például két másodszomszédos játékos összebeszél, az első megjegyzi, hogy milyen számot írt a jegyzettömbre amikor továbbadta, a másik meg megjegyzi, mekkora szám volt rajta, amikor megkapta. A két szám különbsége éppen a közöttük álló életkora. Ezeket az ügyeskedéseket ki lehet védeni bizonyos többletfeltevésekkel és a protokoll bonyolultabbá tételével.

Az életkorok átlagát egyszerűen kiszámítottuk. A milliomosok kérdésének eldöntésére is létezik protokoll, de sokkal bonyolultabb. Az itt következő, korántsem tökéletes megoldás is kellően bonyolult, viszont tartalmazza azokat az általánosan használható ötleteket, amiket ügyesen használva már minden feladatot meg lehet oldani.

Legyen a három gazdag ember Alíz, Bob és Cecil, vagyonuk piculában kifejezve A, B illetve C. Mindegyik tudja, hogy mennyi a saját vagyona, és kíváncsi arra, hogy melyiküké a legnagyobb – anélkül, hogy bármelyiküknek meg kellene mondania ezt az értéket. Az ötlet az, hogy együttesen meghatároznak két pozitív a és b számot úgy, hogy ezek pontos értékét egyikük sem tudja, majd közösen kiszámolják az $f(x) = ax + b$ függvény értékét az $x = A$, az $x = B$ és az $x = C$ helyen. Minthogy az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekszik, és mindnyájan ismerik az $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ értékeket, meg tudják határozni, hármójuk közül ki a leggazdagabb, ki a következő, és ki az utolsó. Ugyanakkor mivel sem az a sem a b értékét nem ismerik, nem tudják megmondani, kinek mekkora a vagyona.

A protokoll eredményeképpen azonban milliomosaink nem csak azt tudják meg, hogy az A, B, C számok milyen nagyságrendben követik egymást, hanem valamivel többet. Tételezzük fel, hogy a számolás végeredménye úgy adódik, hogy az $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ értékek számtani sorozatot alkotnak. Ekkor Bob nem csak azt tudja meg, hogy az ő vagyona a másik kettő között van, hanem azt is, hogy az egyiknek pontosan annyival van több pénze, mint amennyivel a másiknak kevesebbje (vagyis ekkor az A, B, C értékek is számtani sorozatot alkotnak). Ez azért van így, mert az $f(x)$ függvény lineáris. Ha $f(x)$-nek egy pozitív együtthatós másodfokú függvényt választanánk, a protokoll még kevesebb extra információhoz juttatná a résztvevőket.

De hogyan tudják a milliomosok kiszámítani az $ax + b$ függvény értékét, ha sem az a, sem az x, sem a b értékét nem tudja egyikük sem? Az ötlet az, hogy mindhárman tudnak valamit, ami külön-külön nem elég ahhoz, hogy a kérdéses értékeket meghatározzák, viszont együttesen már elegendő. A műveleteket ezeken a részadatokon kell ügyesen elvégezniük.

Minden értéket, amivel számolni fognak, három szám összegeként írunk fel. Mindhárman e három szám közül kettőt ismernek. A hiányzó harmadik szám biztosítja, hogy a kérdéses számot – vagyis az összeget – egyikük sem ismerje. A protokoll folyamán mindannyian egy-egy háromoszlopos táblázat sorait töltik ki. A három oszlopot A-val, B-vel, C-vel jelölve Alíznél az A oszlop, Bobnál a B, és Cecilnél a C oszlop hiányzik.

	Alíz	**Bob**	**Cecil**
A vagyona	$X^* \; Ab \; Ac$	$Aa \; X \; Ac$	$Aa \; Ab \; X$
B vagyona	$X \; Bb \; Bc$	$Ba \; X^* \; Bc$	$Ba \; Bb \; X$
C vagyona	$X \; Cb \; Cc$	$Ca \; X \; Cc$	$Ca \; Cb \; X^*$

A protokoll kezdetekor mindhárman kitöltik a táblázat első három sorát, melyben a megfelelő vagyonok összege szerepel. Természetesen Alíz ismeri saját vagyonát, ezt felírja mint három (nem feltétlenül pozitív) szám összegét: $A = Aa + Ab + Ac$. Ezek közül Ab-t és Ac-t beírja a saját táblázatába, majd elküldi az Aa és Ac értékeket Bobnak, az Aa és Ab értékeket Cecilnek. Az elő sor kitöltődött mindhárom táblázatban, és persze sem Bob, sem Cecil továbbra sem ismeri Alíz vagyonának értékét. Hasonlóan Bob is felbontja saját vagyonát három szám, Ba, Bb és Bc összegére, a megfelelőket elküldi Alíznek és Cecilnek, a saját táblázatába pedig beírja a Ba és Bc értékeket.

Következő lépésként az $f(x)$ függvény a és b pozitív együtthatóit választják meg. Azt kell elérniük, hogy egyikük se tudja, mik ezek az értékek. A legegyszerűbben ezt úgy tudják megtenni, hogy Alíz választ két pozitív a_1 és b_1 értéket, Bob választja a pozitív a_2 és b_2 számokat, Cecil pedig az a_3, b_3 számokat. Ekkor $a = a_1 + a_2 + a_3$ és $b = b_1 + b_2 + b_3$ megfelelő lesz: ezek pozitívak, és egyikőjük sem tudja a és b pontos értékét.

A táblázat következő nyolc sora ezeket az értékeket tartalmazza. Az a_1, b_1 jelű sorok tartalmát Alíz mondja meg a többieknek (és saját magának); az a_2, b_2 sorokét Bob, az a_3, b_3 sorokét pedig Cecil, persze mindenki másnak csak annyit árul el, amennyit azoknak tudniuk kell. Alíz tehát felbontja a_1-et és b_1-et három-három pozitív szám összegére: $a_1 = a_1a + a_1b + a_1c$, valamint $b_1 = b_1a + b_1b + b_1c$, és a megfelelő értékeket a saját táblázatába beírja, illetve elküldi Bobnak és Cecilnek:

	Alíz	Bob	Cecil
a_1	$X^* a_1b\ a_1c$	$a_1a\ X\ a_1c$	$a_1a\ a_1b\ X$
b_1	$X^* b_1b\ b_1c$	$b_1a\ X\ b_1c$	$b_1a\ b_1b\ X$
a_2	$X\ a_2b\ a_2c$	$a_2a\ X^*\ a_2c$	$a_2a\ a_2b\ X$
b_2	$X\ b_2b\ b_2c$	$b_2a\ X^*\ b_2c$	$b_2a\ b_2b\ X$
a_3	$X\ a_3b\ a_3c$	$a_3a\ X\ a_3c$	$a_3a\ a_3a\ X^*$
b_3	$X\ b_3b\ b_3c$	$b_3a\ X\ b_3c$	$b_3a\ a_3b\ X^*$
$a = a_1 + a_2 + a_3$	$X\ ab\ ac$	$aa\ X\ ac$	$aa\ ab\ X$
$b = b_1 + b_2 + b_3$	$X\ bb\ bc$	$ba\ X\ bc$	$ba\ bb\ X$

Az a és b sorok kitöltéséhez nincs szükség további üzenetre: az a jelű sor minden oszlopába az a_1, a_2, a_3 sorok megfelelő oszlopaiban álló számok összege kerül; a b jelű sorba pedig a b_1, b_2, b_3 sorok összege. Mivel mindhárom milliomos az a_1, a_2, a_3 sorok közül kettőben nem ismeri a saját oszlopában álló számot, azért egyikük sem tudja, hogy az a sorban a saját oszlopában milyen szám fog állni. Vagyis együttesen kitaláltak egy olyan a számot, aminek értékét egyikük sem tudja, de hárman együtt már meg tudják határozni.

Már csak az $f(x) = ax + b$ függvény értékét kell kiszámítaniuk az $x = A$, $x = B$ és $x = C$ helyeken. Nézzük például az $f(A)$ értéket:

$$f(A) = aA + b =$$
$$= (aa + ab + ac)(Aa + Ab + Ac) + (ba + bb + bc) =$$
$$= (ab \cdot Ab + ab \cdot Ac + ac \cdot Ab + bb) +$$
$$+ (ac \cdot Ac + ac \cdot Aa + aa \cdot Ac + bc) +$$
$$+ (aa \cdot Aa + aa \cdot Ab + ab \cdot Aa + ba) =$$
$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

Ha megnézzük a táblázatot, A_1 értékét Alíz ki tudja számítani, hiszen nincs benne olyan érték, amit ő ne ismerne. Hasonlóan A_2 értékét Bob, A_3 értékét pedig Cecil tudja kiszámítani. Táblázatunk következő három sora tehát az A_1, A_2, A_3 értékeket fogja tartalmazni, az azt követő pedig ezek összegét, vagyis $f(A)$ értékét:

	Alíz	Bob	Cecil
A_1	$X^* A_1b\ A_1c$	$A_1a\ X\ A_1c$	$A_1a\ A_1b\ X$
A_2	$X\ A_2b\ A_2c$	$A_2a\ X^*\ A_2c$	$A_2a\ A_2b\ X$
A_3	$X\ A_3b\ A_3c$	$A_3a\ X\ A_3c$	$A_3a\ A_3b\ X^*$
$f(A)$	$X\ fAb\ fAc$	$fAa\ X\ fAc$	$fAa\ fAb\ X$

Alíz az általa kiszámított A_1 értéket ismét felírja három szám összegeként: $A_1 = A_1a + A_1b + A_1c$, saját táblázatába beírja az A_1b és A_1c számokat, Bobnak és Cecilnek meg elküldi az ő táblázatukba kerülőket.

Mikor mindhárman kitöltötték az A_1, A_2 és A_3 sorokat, a sorok összegét be tudják írni az $f(A)$ sor megfelelő helyeire. Végezetül Alíz elküldi az $f(A)$ sorából a Bob oszlopában álló számot Bobnak, Bob elküldi a Cecil oszlopában álló számot Cecilnek, és Cecil elküldi az Alíz oszlopában álló számot Alíznek. Ezek után mindhárman ki tudják számítani az $f(A)$ értéket.

Hasonlóan számítják ki az $f(B)$, valamint $f(C)$ értékeket is, és végül mindhárman el tudják dönteni, hogy ki a leggazdagabb anélkül, hogy az eredeti összegeket megtudták volna.

A táblázatokban csillaggal jelöltük meg azokat a „letakart" mezőket, amelyek értékeit a megfelelő résztvevő ismeri. Ezek azokban a sorokban állnak, amelyeket ő töltött ki. Az összes többi letakart helyen álló értékről senkinek sincs további információja.

Hasonló, de egyszerűbb módszerrel tudják eldönteni például, hogy Alíz gazdagabb-e mint Bob. Most csak Alíz és Bob küld el a másik kettőnek a vagyonukat kifejező Aa, Ab, Ac, illetve Ba, Bb, Bc értékek közül kettőt-kettőt. Ezek után mindenki kivonja a táblázat első sorából a másodikat. Alíz gazdagabb mint Bob, ha a harmadik sorban álló számok összege pozitív, és szegényebb, ha ez az összeg negatív.

	Alíz	Bob	Cecil
A vagyona	$X^* Ab\ Ac$	$Aa\ X\ Ac$	$Aa\ Ab\ X$
B vagyona	$X\ Bb\ Bc$	$Ba\ X^*\ Bc$	$Ba\ Bb\ X$
A-B	$X\ Ab\text{-}Bb\ Ac\text{-}Bc$	$Aa\text{-}Ba\ X\ Ac\text{-}Bc$	$Aa\text{-}Ba\ Ab\text{-}Bb\ X$

Ahhoz, hogy eldöntsék, mi is a helyzet, először választanak egy a pozitív véletlen számot, melynek értékét egyikük sem tudja. Ezt ugyanúgy tehetik meg, mint korábban. Majd a fenti trükk segítségével kiszámítják az $a \cdot (A - B)$ értéket, amit már mindhárman megismerhetnek. Ennek előjele megegyezik az $A - B$ előjelével, tehát megmondja, hogy Alíz gazdagabb-e vagy Bob. Mivel az a pozitív számot egyikük sem ismeri, nem fogják tudni, hogy Alíz és Bob vagyona között mekkora is a különbség.

3. Kockadobás telefonon, avagy vegyen el a gép kettőt

Hogyan lehet telefonon kockát feldobni? Hogyan tud Alíz és Bob megegyezni abban, hogy melyik menjen a másikhoz? Ha mindketten ugyanazon a helyen vannak, akkor az egyik feldob egy pénzdarabot, a másik meg megtippeli, hogy az írásra esett-e vagy fejre.

– Feldobtam egy pénzt, most mondd meg mire esett – mondja Alíz telefonba.

– Fej – tippeli Bob.

– Sajnos vesztettél, mert írásra esett.

Hát ez nem volt meglepő, hiszen eshetett akár fejre is. Hogyan lehet elérni, hogy mindkét fél biztos legyen benne, hogy a másik nem csal?

A megoldás a kriptográfia egyik igen hasznos eszköze: az elkötelezés (commitment). Alíz elkötelezi magát a fej vagy írás mellett, és ezt egy lezárt borítékban Bobnak odaadja. Ezután Bob megtippeli a boríték tartalmát, majd kinyitják a borítékot, és eldöntik, ki nyert. Itt persze a „boríték" nem igazi borítékot jelent, hiszen azt nem lehetne telefonon átküldeni (még képként sem).

Ahhoz, hogy a borítékolást meg tudják csinálni, Alíznek és Bobnak mindössze két azonos kalkulátorra van szüksége. Megállapodnak egy bizonyos gombnyomássorozatban: például a négyzetgyök kétszer, azután szinusz, koszinusz, szorozva pi-vel, majd négyzetgyök megint.

Alíz beír egy négyjegyű számot a kalkulátorba úgy, hogy az utolsó előtti számjegy mutatja, hogy fejre vagy írásra gondolt-e: ha ez a számjegy 0, akkor fej (mert a nulla kerek), ha 1, akkor írás. Ezután végrehajtja a megállapított gombnyomásokat, és a kijelzőn álló szám utolsó négy jegyét bediktálja Bobnak. Ez a négyjegyű szám biztosítja, hogy Alíz nem gondolhatja meg magát; viszont csak ebből Bob nem tudja kitalálni, mire is gondolt Alíz.

Miután az „elkötelezettséget" felírta, Bob megmondja Alíznek saját tippjét.

Válaszul Alíz kinyitja a borítékot, vagyis bediktálja Bobnak azt a számot, amit eredetileg írt a kalkulátorba. Ennek harmadik számjegye mutatja, hogy Alíz fejre vagy írásra gondolt-e, és Bob is ellenőrizheti, hogy Alíz nem csalt-e. Ugyanazokat a gombnyomásokat kell végrehajtania saját kalkulátorán, és összevetni az eredményt Alíz elkötelezettségével.

Ahhoz, hogy az eljárás biztonságos legyen, Alíznek biztosnak kell lennie abban, hogy Bob nem tudja kinyitni a borítékot, Bobnak meg azt kell tudnia, hogy Alíz nem tud olyan borítékot készíteni, amit többféleképpen is ki tud nyitni. Bob biztonságához nem az kell, hogy a borítékot egyáltalán ne lehessen többféleképpen kinyitni, hanem csak annyi, hogy Alíz ne tudjon olyan borítékot csinálni, amit ő többféleképpen is ki tudna nyitni.

Esetünkben Alíz a fej/írás mellé még három számjegyet választ, tehát 2000 különböző lehetőség van. A gombnyomogatás eredményeképpen négy számjegyet diktál le Bobnak, ami 10000 lehetőség valamelyike. Tehát azt várjuk, hogy nagy valószínűséggel Alíz elkötelezettségét – a négyjegyű számot – csak egyetlen módon lehet kinyitni. Ezért, ha Bobnak van ideje mind a 2000 lehetőséget végigpróbálni, megtalálja ezt a számot, és így megtudhatja, mire gondolt Alíz. Minden próbálkozásnál a megfelelő számot be kell írni a kalkulátorba, lenyomni a megfelelő műveleti gombokat, azután ellenőrizni az eredményt. Ha mindez csak egyetlen másodpercig tartana (ami nem valószínű), akkor is több mint fél óráig tartana a lehetőségeken végigmenni. Ezért a biztonsághoz Bobnak azonnal tippelnie kell, miután meghallgatta Alíz „elkötelezettségét."

A kocka fordul, ha az első lépésben Alíz nem négyjegyű, hanem hatjegyű számmal kezd. Ekkor ugyanis várhatóan minden elkötelezettséget (négyjegyű számot) sokféleképpen is ki lehet nyitni, úgy is, hogy az eldugott számjegy 0, és úgy is, hogy ez a számjegy 1. Hiába számol Bob akármennyit, nem fogja tudni, hogy Alíz mire gondolt. Ekkor viszont Alíznek van előnye: ha ő tud nagyon gyorsan nagyon sokat számolni, akkor tud választani olyan négyjegyű elkötelezettséget, amit írásként is és fejként is ki tud nyitni. Ezért miután Alíz és Bob megállapodtak, hogy a kalkulátoron milyen gombokat milyen sorrendben kell lenyomni, Alíznak gyorsan el kell küldeni az elkötelezettségét, hogy ne legyen ideje ravaszkodni.

Nem létezik olyan módszer, ami mind Alíz, mind Bob számára abszolút biztonságot jelentene. Itt és más kriptográfiai alkalmazásoknál meg kell becsülni a résztvevők lehetőségeit, a rendelkezésükre álló erőforrásokat, és a feladatok

bonyolultságát ezekhez kell illeszteni. Ha Alíz egy ügyfél, és Bob egy bank, akkor a második módszert választjuk, hiszen feltehetően egy bank jóval több erőforrást tud pillanatok alatt igénybe venni, mint bármelyik ügyfele.

Amikor Alíz és Bob megállapodtak abban, hogy milyen gombokat milyen sorrendben nyomjanak le a kalkulátoron, akkor egy függvényt definiáltak: az argumentum a kalkulátorba beírt szám, a függvény értéke a gombnyomások eredménye. Ez egy olyan függvény, aminek értékét könnyű kiszámolni, de nehéz invertálni: ha adott a függvény értéke, nehéz megkeresni a hozzá tartozó (egyik) inputot. Az ilyen egyirányú függvények nagyon fontos szerepet játszanak a kriptográfiában, és szinte mindegyikből lehet elkötelezettségi sémákat gyártani. Általános módszer egyirányú függvény gyártására egy hálózat készítése.

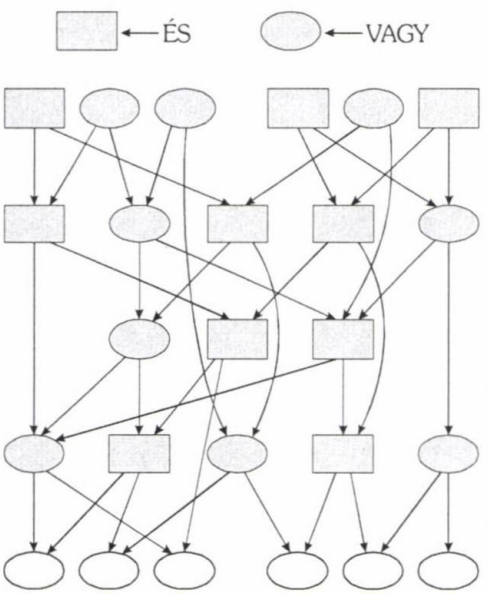
A „hálózat" nevét az elektronikából kapta. A hálózat alján a bemenő kapuk fogadják az input értékeket. A hálózat további szintjein „ÉS", valamint „VAGY" kapuk vannak; mindegyik két (esetleg több) alatta levő kapuval van összekötve. A hálózat legfelső szintjén álló kapuk adják a hálózat kimenetét. Minden kapu értéke vagy 0 vagy 1. Ha tudjuk az alsó szinten álló kapuk értékét, a hálózat többi kapujának értékét lentről fölfelé számíthatjuk ki. Egy ÉS kapuba akkor kerül egyes, ha mindazon lentebb levő kapukban, amikkel ő össze van kötve, egyes áll. Egy VAGY kapuba akkor kerül egyes, ha valamelyik lentebb levő, vele összekötött kapuban van egyes.

Az 1. ábrán egy öt szintű hálózatot látunk; a 2. ábrán számítjuk ki, hogy mit is ad a hálózat az 101010 inputra.

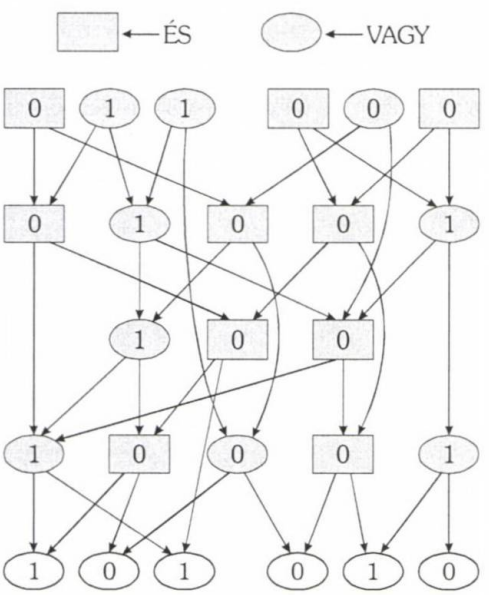
Ilyen bináris (két értékű) hálózatoknál szokás még további kapukat is használni. A „NÉS" kapu eredménye az ÉS kapu eredményének ellentettje, hasonlóan az „NVAGY" a VAGY kapu eredményének ellentettje. Ezek jelölése abban különbözik az ÉS, valamint VAGY kapukétól, hogy a tetejükön még egy kis gombóc is van. Az összeadó vagy paritáskapu eredménye pedig akkor egyes, amikor a bementei között páratlan sok egyes található. Mivel az ÉS, valamint a VAGY kapukkal is megfelelő bonyolultságú hálózatokat tudunk készíteni – legalábbis eleinte –, nem érdemes további kapukat is használni.

Alíz és Bob megállapodnak egy hálózatban – például úgy, hogy Alíz készíti el a hálózat egyik felét, Bob meg a másikat. Ezek után Alíz a következőképpen rejti el a fej/írás eredményt: ha az inputban található egyesek száma páros, akkor fej, ha az egyesek száma páratlan, akkor írás.

Alíz kiszámítja a hálózat értékét (vagyis a legfelső szinten álló kapuk értékét), és azt megmondja Bobnak.



1. ábra



2. ábra

Ahhoz, hogy a kezdeti értéket ne lehessen egyszerűen az összes lehetőség kipróbálásával könnyen megkeresni (ezt hívják a nyers erő alkalmazásának), a bemenő kapuk számát viszonylag nagyra kell választani. Hat bemenő kapu esetén mindössze 64 lehetséges input van, amiket nem nehéz mind végigpróbálni. Tíz bemenő kapunál ez a szám már 1024, húsz kapunál pedig már egymillió fölött van. Ahogy a bemenő kapuk számát növeljük, a hálózat is egyre bonyolultabb és áttekinthetetlenebb lesz. Így ahelyett, hogy a kapuk számát növelnénk, inkább megengedjük, hogy az egyes kapuk ne csak 0-t és 1-et, hanem tetszőleges számjegyet tartalmazhassanak. Az ÉS kapuk mondjuk az inputjukba írt számjegyek szorzatának utolsó jegyét adják eredményül, a VAGY kapuk pedig mondjuk az inputok összegének utolsó számjegyét. Ezzel hat bemenő kapunál a lehetséges inputok száma egymillióra nőtt, ami már meghaladja a kipróbálható inputok számát, ugyanakkor a hálózat értékét még mindig könnyen ki lehet számítani.

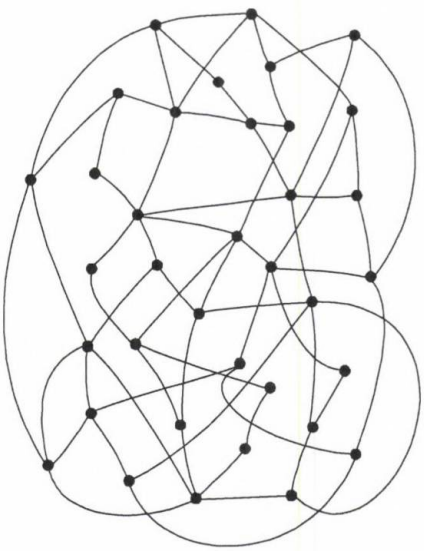
Egy lehetséges iskolai alkalmazásban a hálózatot minden tanuló ismeri. A bemenő számjegyek helyére mondjuk a dolgozat két példájának a végeredményét kell beírni. A tanár megadja a hálózat kimenetét, és így a tanulók ellenőrizhetik, hogy helyes eredményt kaptak-e. És mindezt anélkül, hogy az eredményt előre tudták volna!

A televíziós műveltségi vetélkedőben az izgalom a tetőfokára hág. A tét több millió forint. A játékos a négy lehetséges válasz közül kettő között ingadozik, a másik kettőről biztosan tudja, hogy rossz. A két lehetőség közül az egyik jó. De melyik? Két segítsége már elment, maradt a felezés: a négy lehetséges válasz közül kettő rossz eltűnik, és csak a helyes és egy helytelen válasz marad meg. Ha a „felezés" véletlenszerű, akkor 2/3 esélye van arra, hogy az általa kiválasztott két, még lehetséges válasz közül az egyik eltűnjön, és immár biztos legyen abban, mi is a jó válasz. Igen ám, de honnan tudhatja a játékos, és honnan tudhatja a tévé előtt ülő sok néző, hogy a felezés tényleg véletlenszerűen történik, és sem a játékvezető, sem a műsor készítői nem manipulálják azt? Tudna az olvasó egy egyszerű, de mégis meggyőző eljárást ajánlani?

4. A fagylaltos kocsik hova álljanak?

A 3. ábrán egy kisváros úthálózatát láthatjuk; a csomópontokat a kis körök jelzik, ezeket utak kötik össze. Ha két út a térképen nem csomópontban keresztezné egymást, akkor a valóságban ott nincs is útkereszteződés, az egyik út a másik fölött vagy alatt vezet. Amikor nagyon meleg van, fagylaltoskocsik jelennek meg. Mindegyik egy-egy csomópontban árulja a finom hűsítő fagyit. Azért, hogy ne rontsák egymás üzletét, szomszédos csomópontokba nem állnak. Viszont az sem volna jó, ha valahonnan a legközelebbi fagylaltoskocsi túl messze kerülne. Így az lenne a legjobb, hogy ha valamelyik csomópontban nincs fagylaltoskocsi, akkor annak valamelyik szomszédjában már van. Meg lehet ezt csinálni? Ha igen, akkor hány fagylaltoskocsira van szükség?

A feladat tehát az, hogy egy gráf csúcsai közül válasszunk ki néhányat úgy, hogy *a)* a kiválasztott csúcsok között ne fusson él, de *b)* minden nem kiválasztott csúcs össze legyen kötve valamelyik kiválasztottal. A csúcsoknak ilyen halmazát lefogórendszernek nevezik. Annak eldöntése, hogy egy gráfban létezik lefogórendszer, NP-teljes probléma. Ez azt jelenti, hogy ilyet találni, ha van is, nagyon nehéz. Az összes lehetséges esetet – vagyis a gráf csúcsainak összes részhalmazát – végig kell próbálni, ennél



3. ábra

lényegesen gyorsabban nem tudunk célhoz érni. Az sem segít, hogy sok részhalmazról azonnal látszik, hogy nem lehet lefogórendszer; sajnos túl sok megvizsgálandó eset marad. A diákok is meggyőződhetnek a feladat nehézségéről, ha néhányszor tíz-tizenöt csúcsú gráfban megpróbálnak lefogórendszert keresni.

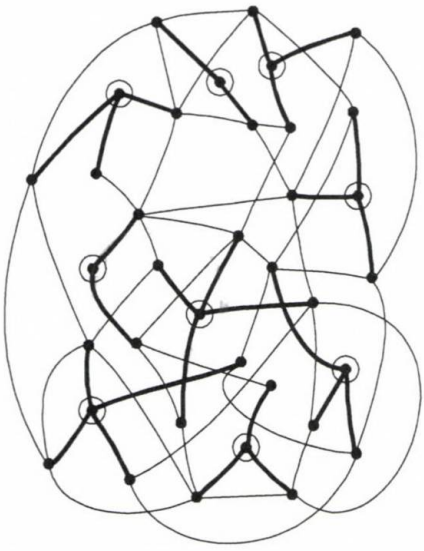
Ilyen nehéz, szinte megoldhatatlan feladatot nagyon könnyen tudunk gyártani. Először kigondoljuk, mi lesz a megoldás: felrajzoljuk a csomópontokat, kijelöljük a fagylaltoskocsik helyét, és minden további csomópontot pontosan egy fagylaltoskocsit tartalmazó csúccsal kötünk össze (4. ábra). Azok között a csúcspontok között, ahol nincsenek fagylaltoskocsik, még további éleket húzunk be véletlenszerűen, hogy a végén nagyjából egyenletes legyen az úthálózat (5. ábra). A térképet szinte pillanatok alatt elkészíthetjük, a hozzá tartozó megoldás pedig a mi titkunk marad (4+5. ábra).

Alíz egy ilyen térképet használhat arra, hogy elkötelezze magát. Felrajzol egy térképet, amiben a fagylaltoskocsikat el lehet helyezni. Fejre gondol, ha a fagylaltoskocsik száma páros, és írásra, ha ez a szám páratlan. Könnyű látni, hogy ha van két lefogórendszer is, akkor a benne levő csúcsok száma ugyanakkora kell legyen, ezért ez a módszer Bob számára abszolút biztonságos. Alíz számára az jelenti a biztonságot, hogy a feladat NP-teljes. Az ugyan nincs bizonyítva, hogy nincs gyors eljárás, ami minden gráfban megkeresné a lefogórendszert, de ha Bob mégis találna ilyen eljárást, annak nagyon sok olyan következménye lenne, amiről a matematikusok nem hiszik, hogy igazak volnának. Ráadásul olyan fantasztikus matematikai eredményt érne el, amire sok tízezer kiváló elme több évtizedes kitartó munkával sem volt képes.

Alíz úgy tudja meggyőzni Bobot arról, hogy elkötelezettsége helyes volt, hogy megmutatja neki, mely csúcsokba kell tenni az adott számú fagylaltoskocsit – vagyis megmutatja a feladat megoldását. Az, hogy ez tényleg jó megoldás, gyorsan és könnyen ellenőrizhető.

Azt, hogy minden lefogórendszerben ugyanannyi elem van, a következőképpen láthatjuk be. Legyen F_1, F_2, ... és G_1, G_2, ... egy-egy lefogórendszer. Mindegyik G_i-hez pontosan egy olyan F_j található, amitől legfeljebb egy távolságra van (mert az F_j-k lefogó rendszert alkotnak), és mindegyik F_j-hez pontosan egy ilyen G_i (mert a G_i csúcsok is lefogórendszer alkotnak). Az egymáshoz tartozó F-beli és G-beli csúcsok mindkét esetben ugyanazok, hiszen csak így lehetnek vagy ugyanabban vagy szomszédos csúcsban. Ezért ez egy kölcsönösen egyértelmű leképezés, és így a két lefogórendszer ugyanannyi elemű.

4. ábra



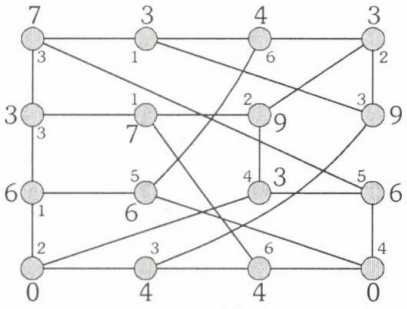
5. ábra

5. Nyilvános kulcsú titkosírás – maszek alapon

Mi is a nyilvános kulcsú titkosírás? Olyan titkosítási eljárás, amelynél a nyilvános kulcs birtokában bárki tud titkosítani, de a titkosított üzenetet csak a titkos kulcs birtokában lehet visszafejteni.

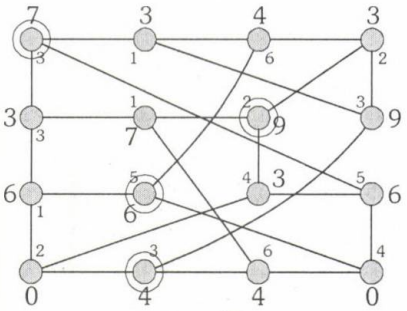
Alíz nyilvános kulcsa egy várostérkép, amit mindenkinek odaad, aki titkosan üzenni akar neki. A titkos kulcs pedig a csúcsoknak az a részhalmaza, ahová a fagylaltoskocsikat el kell helyezni. Azt már láttuk, hogy a nyilvános kulcs – vagyis a várostérkép – ismeretében a titkos kulcsot csak kivitelezhetetlenül nagy munka árán lehet megkapni. Hogyan lehet a nyilvános kulcsot titkosításra használni, és hogyan lehet az üzenetet a titkos kulcs segítségével visszafejteni?

Viszonylag egyszerű térkép esetén az üzenet egyetlen számjegy, nagyobb térképnél ez akár két- vagy háromjegyű szám is lehet. Mondjuk Alíz nyilvános térképét a 6. ábrán láthatjuk, és az üzenetünk a 6-os számjegy. Ezt a következőképpen titkosítjuk: minden egyes csúcshoz az utolsót kivéve írjunk véletlenszerűen egy 0 és 9 közötti számjegyet; az utolsót pedig válasszuk meg úgy, hogy a felírt számjegyek összegének utolsó jegye az üzenet legyen.



$\Sigma = 5\mathbf{6}$

6. ábra



$\Sigma = 5\mathbf{6}$

$7 + 9 + 6 + 4 = \mathbf{26}$

7. ábra

Egy lehetséges felírást a csúcsoknál álló kis méretű számjegyek mutatnak, mivel ezek összege 56, és az üzenet a 6 volt. Ezek után ezeket a számjegyeket elrejtjük: minden egyes csúcsba felírjuk az ottani és a csúcs szomszédaiban álló számjegyek összegének utolsó jegyét. Például a bal felső csúcsba 7-es kerül, mert $8 + 3 + + 5 + 1 = 17$; a jobb alsó sarokba pedig nulla, mert $5 + 4 + 6 + 5$ nullára végződik. A kódolt üzenet a csúcsokhoz írt nagy számjegyekből áll. Mivel az előállításhoz csak a térképet használtuk, mindenki, aki ismeri a térképet (vagyis Alíz nyilvános kódját), tud titkosított üzenetet készíteni.

Hogyan tud Alíz megfejteni egy ilyen üzenetet? Ehhez újból össze kellene adnia a csúcsokhoz írt kisméretű számjegyeket. És itt segít neki a titkos kulcs. A titkos kulcs ugyanis a csúcsoknak egy olyan részét jelöli ki, hogy az ezek és ezek szomszédai minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaznak.

Tehát az itt álló nagy számok összegének utolsó jegye megegyezik az összes kis szám összegének utolsó jegyével. Így például a példában Alíz kulcsát a bekarikázott csúcsok alkotják (7. ábra). A titkosított üzenetnek az ide eső értékei 7, 9, 6 és 4, ezek összege 26, aminek utolsó jegye 6, az elrejtett szám.

Használhatjuk a 3. ábrát is nyilvános kulcsnak. Mondjuk most a titkos üzenet a kétjegyű 75. A csúcsokhoz véletlen kétjegyű számokat írunk úgy, hogy az összegük utolsó két számjegye kiadja a titkos 75 számot (8. ábra). Minden egyes csúcsba beírjuk az ott és a szomszédaiban álló számok összegének utolsó két számjegyét. Például a bal felső csúcsnál ez az összeg $32 + 81 + + 61 + 16 + 74 = 264$, így az oda kerülő szám 64 lesz. Minden csúcsnál elvégezve az összeadást megkapjuk az üzenetet (9. ábra). A titkosított üzenet megfejtéséhez összeadjuk azoknál a csúcsoknál álló számokat, ahová a fagylaltoskocsikat kell elhelyezni (10. ábra):

$$19 + 89 + 55 + 36 + 36 + + 62 + 56 + 80 + 42 = 475,$$

tehát az üzenet 75 volt.

A nagy, „igazi" rendszerek is hasonló elveken működnek. A most ismertetett nyilvános kulcsú rendszer kiválóan alkalmas a módszer illusztrálására. A gondos és részletes vizsgálatok azonban a rendszer gyengeségeit is megmutatják. Azt be tudjuk bizonyítani, hogy nincs olyan hatékony algoritmus, ami a nyilvános kulcsból meghatározná a titkos kulcsot. (Pontosabban csak azt tudjuk, hogy ha mégis létezne ilyen algoritmus, akkor egyáltalán nem volnának nehéz feladatok.) De nem lehetséges, hogy az elrejtett értéket a kulcs ismerete nélkül is meg tudjuk határozni? Térjünk vissza a 6. ábrához, ahol egy ismeretlen értéket rejtettünk el. Az ismeretlen érték a csúcsokhoz írt (ugyancsak ismeretlen) számjegyek összegének utolsó jegye. Amiket ismerünk, azok a csúcsokhoz írt számok. Az ábrán 16 csúcs van, a csúcsokhoz írt számjegyeket jelöljük sorban x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, ..., x_{44}-gyel attól függően, hogy a csúcs hányadik sorban és oszlopban van. A bal felső sarokban álló érték 7, tehát fennáll a következő kongruencia:

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{34} \equiv 7 \pmod{10}.$$

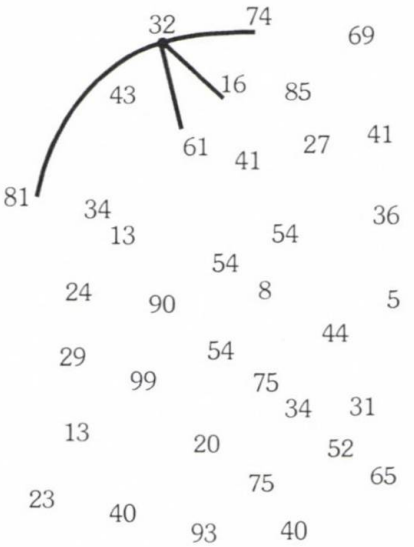
Hasonlóan az összes többi csúcsra fel tudjuk írni a megfelelő kongruenciát, például a jobb alsó csúcsban álló szám nulla, ezért

$$x_{43} + x_{44} + x_{34} + x_{32} \equiv 7 \pmod{10}.$$

Van összesen 16 lineáris kongruenciánk és 16 ismeretlenünk, azt várjuk, hogy az összes ismeretlent meg tudjuk határozni (valóban ez is a helyzet), és ekkor az x_{11}, ..., x_{44} ismeretlenek összege megadja az elrejtett üzenetet.

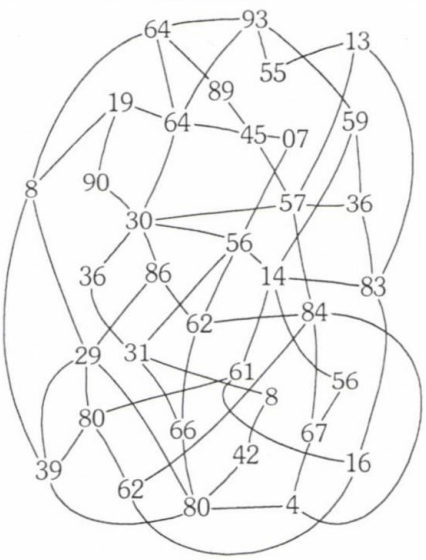
A 3. ábrát használva a „titok" meghatározásához egy 36 ismeretlenes kongruencia-rendszert kellene megoldani, ami szinte ugyanannyira reménytelen vállalkozás, mint a lefogórendszer megkeresése.

Kódolás:
A titok:75
$32 + 81 + 61 + 16 + 74 = 264$



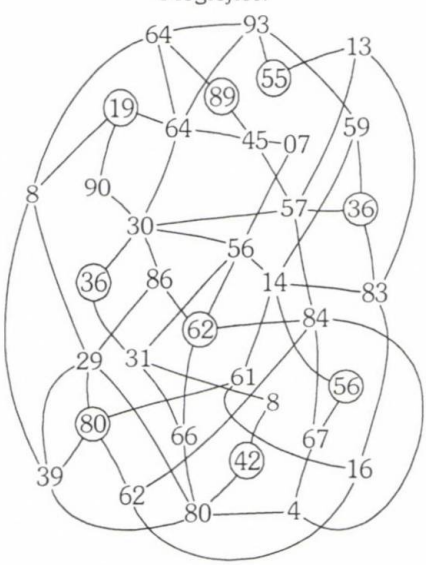
8. ábra

Az üzenet:



9. ábra

Megfejtés:



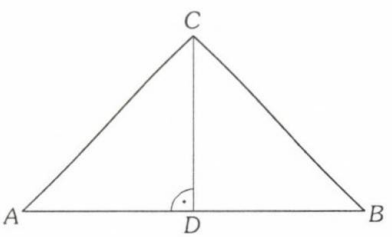
10. ábra

Károlyi Károly

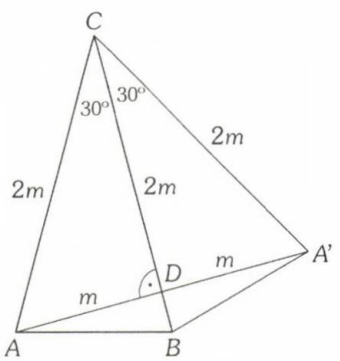
Geometriai versenyfeladatok 7-8. osztályosoknak

Mekkorák lehetnek annak a tükrös háromszögnek a szögei, amelynek az egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó magasságnak?

a) Legyen a szóban forgó magasság a háromszög szimmetriatengelye. A C csúcshoz tartozó magasság talppontját jelölje D.
$AB = 2 \cdot CD$ feltétel miatt az ADC és a DBC egyenlő szárú háromszögek, és ezért a háromszögünk szögei: 45°, 45°, 90°.

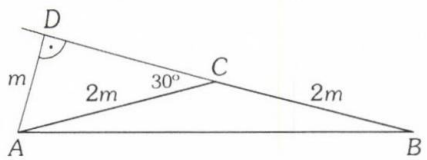


b) Legyen a szóban forgó magasság a szárak egyikéhez tartozó. E magasságot a háromszög belsejében tartalmazza.

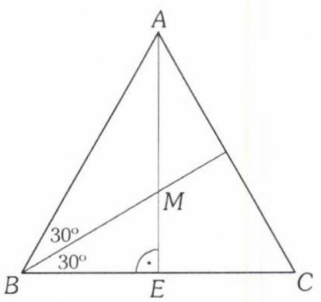


Az előbbi esetben az ADC derékszögű háromszög AC átfogója (az ABC háromszög tükrös volta miatt) a $BC = 2m$ oldallal egyenlő, és az ACD háromszöget DC befogójára tükrözve $2m$ oldalú szabályos háromszöget kapunk.

Az ABC háromszög szárszöge tehát 30°, azaz háromszögünk szögei: 75°, 75°, 30°.
c) Végül, ha a szárak egyikéhez tartozó magasság a háromszögön kívül halad, akkor az ABC háromszög szárszögének mellékszöge 30°, mivel az ACD háromszög ugyanaz az eset, mint az előző háromszögnél az ACD háromszög.
Ha az ACD háromszöget DC befogóra tükrözzük, szabályos háromszöget kapunk. Ebből következik, hogy az ACD szög 30°. Az ABC háromszög szárszöge 150°, alapon levő szögei 15°-osak.
A feladat feltételeit tehát három háromszögtípus elégíti ki.



Az ABC háromszög AE magassága a B szög belső szögfelezőjét M-ben metszi. Igazold, hogy ha a B szög mértéke az A és C szögek mértékének számtani közepe, akkor $2AE = 3BM$!

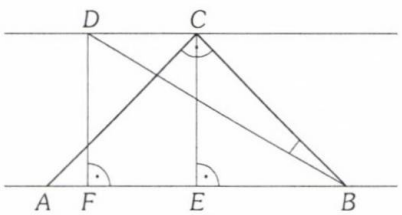


A szokásos jelölésekkel (a cikk további részében is ezeket használjuk) $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, azaz $2\beta = \alpha + \gamma$, vagyis $3\beta = \alpha + \beta + \gamma = 180°$, ahonnan $\beta = 60°$.

Mivel $MBA\sphericalangle = 30°$, továbbá az ABE derékszögű háromszögben $ABE\sphericalangle = 60°$, így $BAM\sphericalangle = 30°$, tehát $MBA\sphericalangle = BAM\sphericalangle = 30°$, azaz AMB háromszög egyenlő szárú, vagyis $AM = BM$.
BME derékszögű háromszögben $MBE\sphericalangle = 30°$, így $BM = 2EM$, tehát $2AE = 2(AM + EM) = 2AM + 2EM = 2BM + BM = 3BM$.

Az AB egyenes párhuzamos a CD-vel, továbbá $AC = CB$, $AB = BD$ és $ACB\sphericalangle = 90°$. Mekkora a $CBD\sphericalangle$?

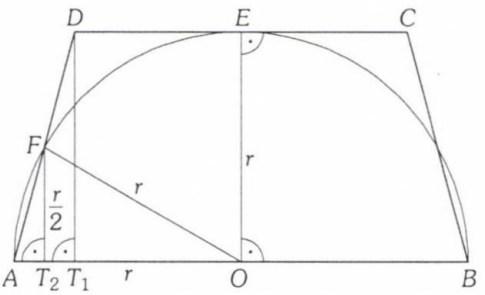
Húzzuk meg a CE, DF magasságokat. $ECDF$ paralelogramma, tehát $CE = DF$. $CAB\sphericalangle = 45°$ miatt $DF = CE = EA = EB$, és így $DB = AB = 2 \cdot EB$ miatt $DF = \frac{DB}{2}$. BDF háromszögben az F-nél lévő belső szög 90°, ezért $DBF\sphericalangle = 30°$. Tehát $CBD\sphericalangle = CBE\sphericalangle - DBF\sphericalangle = 45° - 30° = 15°$.



Az $ABCD$ húrtrapéz AB alapjára, mint átmérő fölé rajzolunk egy félkörívet. A félkör a szárakat felezi, és érinti a trapéz másik alapját. Mekkorák a trapéz szögei?

Jelöljük az AD szár felezőpontját F-fel, a CD alapon az érintési pontot E-vel, az AB felezőpontját O-val. Kössük össze O-t F-fel és E-vel. Leolvasható $AO = OF = EO = r$.
Az F és D pontból bocsássunk merőlegest AB-re! A talppontokat T_2 és T_1-gyel jelöljük. Leolvasható, hogy EO párhuzamos és egyenlő DT_1 és DT_1OE négyszög téglalap, tehát a $DT_1 = EO = r$. Az FAT_2 háromszög hasonló DAT_1 háromszöghöz, mivel a megfelelő szögeik egyenlők, a hasonlóság aránya $AF : AD = 1 : 2$. Ebből következik, hogy $FT_2 : DT_1 = 1 : 2$.

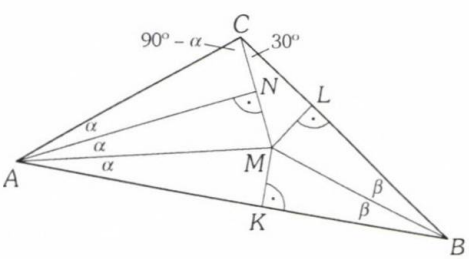
Mivel $DT_1 = r$, ezért $FT_2 = \frac{r}{2}$, az FT_2O derékszögű háromszögben $2FT_2 = FO$. A háromszöget az AO egyenesre tükrözve az eredeti és a tükörkép együtt egy szabályos háromszöget ad. Így az $AOF\sphericalangle = 30°$. Mivel az AOF háromszög egyenlő szárú, ezért az $FAO\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Tehát a trapéz szögei 75°; 75°; 105°; 105°.



Az ABC háromszögben a B szög szögfelezőjén van olyan M pont, ahol $AM = AC$ és $MCB\sphericalangle = 30°$. Bizonyítsuk be, hogy az $AMB\sphericalangle = 150°$!

Bocsássunk M-ből merőlegest AB-re, ill. BC-re, a talppontokat jelölje K, ill. L. $MLB_\triangle \equiv MKB_\triangle$ (MB közös oldal és a megfelelő szögek egyenlőek), így $MK = ML$.
Az MLC háromszög szögei 30°, 60°, 90°, ezért $MC = 2 \cdot ML = 2 \cdot MK$. Legyen N az MC felezőpontja. Ekkor $\frac{MC}{2} = MN = ML = MK$.

Az AN az AMC egyenlő szárú háromszögben súlyvonal, szögfelező és magasság is.
$AMN_\triangle \equiv AMK_\triangle$ (AM közös oldal, $MN = MK$, az AM oldallal szemközti szög 90°), így a $KAM\sphericalangle = MAN\sphericalangle = \alpha$, mivel AN szögfelező, ezért az $NAC\sphericalangle$ is egyenlő α-val. Az ANC háromszögben $ACN\sphericalangle = 90° - \alpha$.
Az ABC háromszög szögösszege: $3\alpha + (90° - \alpha) + 30° + 2\beta = 180°$, azaz $2\alpha + 2\beta = 60°$, azaz $\alpha + \beta = 30°$. Ezért $AMB\sphericalangle = 150°$.



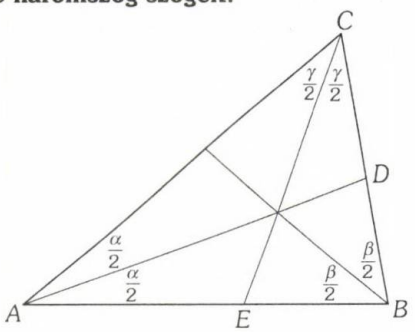
Számítsd ki az *ABC* háromszög *BAC* szögét, ha az harmada a *BOC* szögnek, ahol *O* a háromszögbe írható kör középpontja!

A háromszög belső szögfelezőjének metszéspontja a háromszögbe írható kör középpontja. Tudjuk, hogy $3 \cdot BAC\sphericalangle = BOC\sphericalangle$.

Mivel $\alpha+\beta+\gamma=180°$, így $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90°$.

$3\alpha = BOC\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$, azaz $3\alpha = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$, az egyenletet megoldva $\alpha = 36°$ adódik.

Az *ABC* háromszögben a *B* és *C* szögek szögfelezői az *O* pontban metszik egymást. Legyen $AO \cap BC = \{D\}$ és $CO \cap AB = \{E\}$, $AD = AB$ és $BO = BE$. Számítsuk ki az *ABC* háromszög szögeit!



A feltételek szerint az *ADB* háromszög egyenlő szárú, így $BAD\sphericalangle = 180° - 2\beta$, azaz

$$BAC\sphericalangle = 360° - 4\beta. \quad (1)$$

BOE háromszög egyenlő szárú, $BO = BE$ feltétel szerint, ebből következik, hogy

$$BOE\sphericalangle = \frac{180° - \frac{\beta}{2}}{2}. \quad (2)$$

De $BOE\sphericalangle$ a *BOC* háromszögnek külső szöge, és így

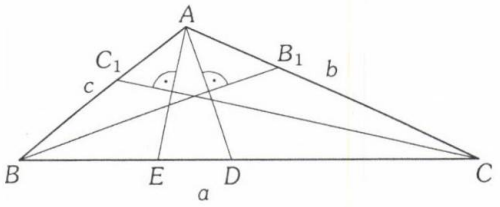
$$BOE\sphericalangle = \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

A (2) és a (3) alapján $\frac{180° - \frac{\beta}{2}}{2} = \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$, ahonnan

$$\gamma = 180° - \frac{3\beta}{2}. \quad (4)$$

(1) és (4) összefüggések miatt $360° - 4\beta + \beta + 180° - \frac{3}{2}\beta = 180°$ egyenlet adódik, melyet megoldva $\beta = 80°$, ahonnan $\alpha = 40°$ és $\gamma = 60°$.

Az *ABC* háromszögben *A* szög = 120°, BB_1, és CC_1 szögfelezők, ahol $B_1 \in AC$, és $C_1 \in AB$. Jelöljük *D*-vel és *E*-vel az *A* pont tükörképét a BB_1 és CC_1 egyenesekre nézve. Igazoljuk, hogy $D, E \in BC$! Számítsuk ki az *EAD* szög nagyságát! Határozzuk meg a *DE* hosszát az *ABC* háromszög oldalainak segítségével!



D tükörképe *A*-nak a BB_1 tengelyre vonatkozóan. $ABB_1\sphericalangle = B_1BD\sphericalangle$, így $D \in BC$. Hasonlóan igazolható, hogy $E \in BC$.

$BAC\sphericalangle = 120°$, ebből következik, hogy $ABC\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 60°$.

$EAD\sphericalangle = BAD\sphericalangle + EAC\sphericalangle - BAC\sphericalangle =$

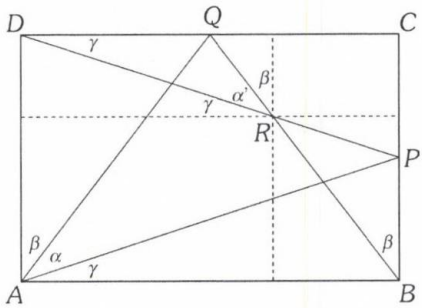
$= 90° - \frac{ABC\sphericalangle}{2} + 90° - \frac{ABC\sphericalangle}{2} - BAC\sphericalangle =$

$= 180° - 30° - 120° = 30°$.

$AB = BD = c$, $CE = AC = b$, így $DE = BD + CE - BC = b + c - a$.

Az *ABCD* téglalap *BC* oldalának felezőpontja *P*, *CD* oldalának felezőpontja *Q*. *R* a *BQ* és *DP* egyenesek metszéspontja. Igazoljuk, hogy $PAQ\sphericalangle = DRQ\sphericalangle$!

I. megoldás: a szimmetria kihasználása.

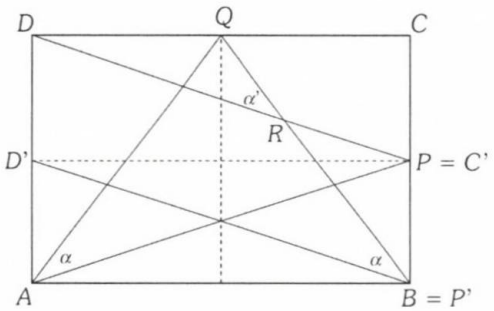


Az R ponton át húzzunk párhuzamost a téglalap oldalaival. Ha

$$\alpha+\beta+\gamma=90°,$$
$$\alpha'+\beta+\gamma=90°,$$

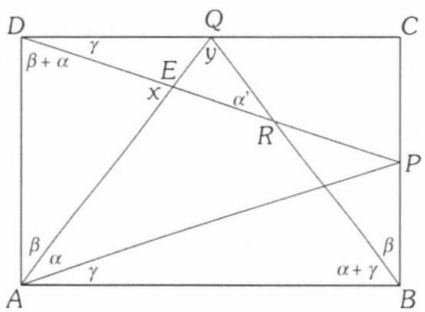
akkor $\alpha=\alpha'$, amit bizonyítani kellett.

II. megoldás: szintén a szimmetriát használjuk ki.



Toljuk el a CD szakaszt CP vektorral, illetve a DP szakaszt PB vektorral. A szimmetria miatt a $D'BQ\sphericalangle=\alpha$, a $DRQ\sphericalangle$ egyállású a $D'BQ\sphericalangle$-gel, ezért $D'BQ\sphericalangle=DRQ\sphericalangle$, azaz $\alpha=\alpha'$, amit bizonyítani kellett.

III. megoldás: szögszámolással.



Bizonyítandó: $\alpha=\alpha'$.

A szimmetria alapján jelöljük és írjuk be a szögeket! Felírjuk az ADE háromszögre, illetve az ABQ háromszögre a szögösszeget!

$$x+2\beta+\alpha=180°,$$
$$y+2\alpha+2\gamma=180°.$$

A két egyenletet összegezve kapjuk, hogy

$$x+y+2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha=360°.$$

Mivel $(\alpha+\beta+\gamma)=90°$, ezért a $2(\alpha+\beta+\gamma)=$ $=180°$.

$$x+y+180°+\alpha=360°,$$
$$x+y+\alpha=180°. \qquad (1)$$

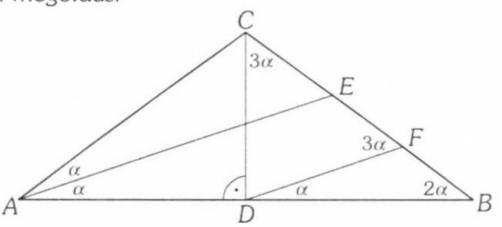
Az EQR háromszögben a szögösszeg:

$$x+y+\alpha'=180°. \qquad (2)$$

Az (1) és (2)-ből következik, hogy $\alpha=\alpha'$, amit bizonyítani kellett.

Egy tompaszögű egyenlő szárú háromszög két belső szögfelezője közül a hosszabbik kétszerese a rövidebbiknek. Mekkorák a háromszög szögei?

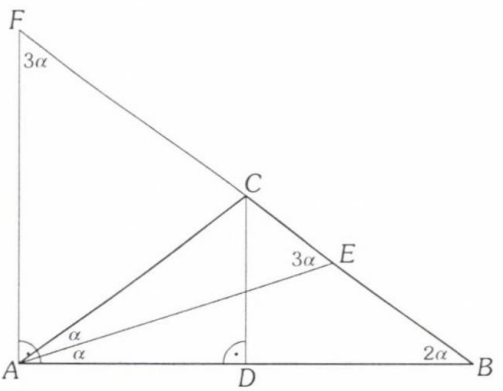
I. megoldás:



A két szóban forgó szögfelező AE és CD ($AE=2CD$). Jelöljük az AB alapon levő szögeket 2α-val. Húzzunk párhuzamost AE-vel D-n keresztül, így kapjuk a DF szakaszt. Mivel D az AB oldal felezőpontja, DF az ABE háromszög középvonala. Így DF fele AE-nek, és így $DF=CD$. Az ábrán α-val jelölt szögek egyenlők, és így $DFC\sphericalangle=3\alpha$, hiszen a DBF háromszög külső szöge. Mivel a DFC háromszög egyenlő szárú, $DCF\sphericalangle=3\alpha$. A BDC derékszögű háromszög két hegyesszögének összege 90°, tehát $5\alpha=90°\Rightarrow\alpha=18°$.

A háromszög szögei tehát 36°, 36°, 108°.

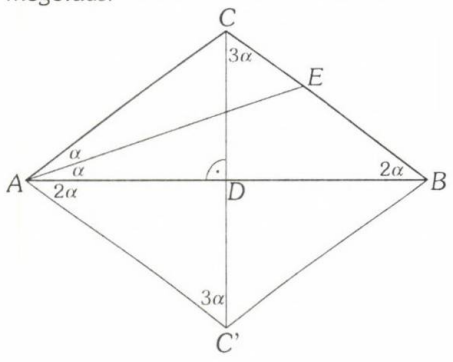
II. megoldás:



Az AB oldal A pontjából emeljünk merőlegest AB-re, ez a BC egyenest F pontban metszi. CD az ABF háromszög középvonala. $2CD=AF$, $2CD=AE$, ebből következik, hogy $AF=AE$,

az AFE háromszög egyenlő szárú, az $AEF\sphericalangle = 3\alpha$, mert az ABE háromszög külső szöge.
Az AFE háromszögben $AEF\sphericalangle = AFE\sphericalangle = 3\alpha$. Tehát az ABF derékszögű háromszögben a két hegyesszög összege $3\alpha + 2\alpha = 90°$, így $\alpha = 18°$. A háromszög szögei tehát 36°, 36°, 108°.

III. megoldás:



Tükrözzük a háromszöget az AB oldal egyenesére! $ACBC'$ rombuszt kapunk, ahol $AE = CC'$ és $BC \parallel AC'$. Az $AC'EC$ négyszög húrtrapéz.

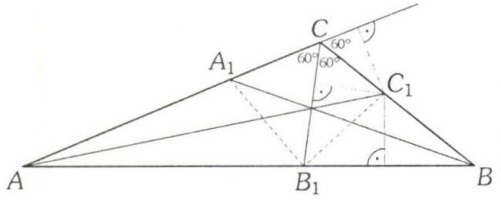
$$AEC'\sphericalangle = CC'A\sphericalangle = 3\alpha$$

és

$$AC'C\sphericalangle = C'CE\sphericalangle = 3\alpha,$$

mert váltószögek. A BCD háromszögben $3\alpha + 2\alpha = 90°$, így $\alpha = 18°$. A háromszög szögei tehát 36°, 36°, 108°.

Az ABC háromszög B csúcsánál levő szöge 120°-os. AA_1, BB_1, CC_1 a belső szögek szögfelezői. Mekkora az $A_1B_1C_1$ szög?

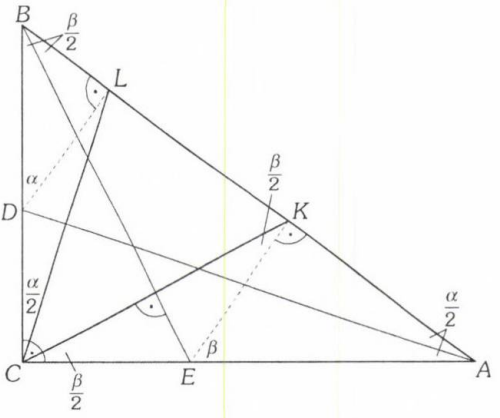


B csúcsnál levő külső szög 60°, ahogy az ABB_1 szög is, ezért C_1 pont távolsága a CB és a BB_1 oldaltól egyenlő. A C_1 pont BC és CA oldaltól mért távolsága egyenlő, mert CC_1 szögfelező. Tehát C_1 az AB_1B szög szögfelezőjén van, hasonlóan az A_1 pont a CB_1B szög szögfelezőjén. Ezért

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = A_1B_1B\sphericalangle + BB_1C\sphericalangle =$$
$$= \frac{1}{2}BB_1C\sphericalangle + \frac{1}{2}A_1B_1B\sphericalangle = 90°.$$

Az ABC derékszögű háromszög hegyesszögeinek felezői D, illetve E pontban metszik a szemközti befogót. D-ből és E-ből merőlegest állítunk az AB átfogóra, a talppontok K és L. Mekkora az LCK szög?

Az α és β hegyesszögek összege 90°. BE-re szimmetrikus a $BCE_\triangle$ és a $BKE_\triangle$, így $BCE_\triangle \cong BKE_\triangle$ (BE közös oldal, a szögek páronként egyenlők).



$BCEK$ négyszög deltoid, átlói merőlegesek egymásra.

$KCE\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mert a $KEA\sphericalangle = \beta$ (külső szög), de $KCE\sphericalangle = CBE\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek. Hasonlóan bizonyítható, hogy a $DCLA$ négyszög deltoid, az LCD szög pedig $\frac{\alpha}{2}$.

A keresett $LCK\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° - 45° =$
$= 45°$.

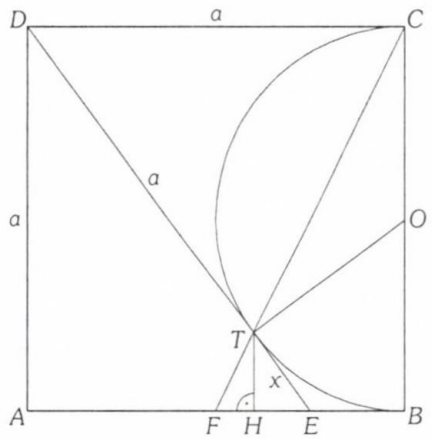
Egy $ABCD$ négyzet belsejében megszerkesztjük a BC átmérőjű félkört. A félkörhöz meghúzzuk a DE érintőt, $E \in AB$, amely a félkört a T pontban érinti. Legyen F az AB szakasz felezőpontja. Hányad része az EB szakasz az AB szakasznak? Bizonyítsd be, hogy a C, a T és az F pontok egy egyenesen vannak! Hányad része a TEF háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének?

a) $CD = TD$ és $EB = ET$, mert a körhöz külső pontból húzott érintők egyenlők.
Legyen $CD = a$, $EB = x$, akkor

$$DE = DT + TE = CD + EB = a + x.$$

Az AED derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $a^2 + (a-x)^2 = (a+x)^2$, melyet megoldva $x = \frac{a}{4}$ adódik.

Tehát az EB szakasz $\frac{1}{4}$ része az AB szakasznak.



b) $BTC\sphericalangle$ a Thalész-tétel értelmében 90°. Kössük össze a T pontot az F-fel. BTF háromszögben $EB = TE = \frac{a}{4}$ és $AF = BF = \frac{a}{2}$, ebből következően $TE = FE = EB$ és a Thalész-tétel szerint az FTB háromszög derékszögű, azaz $FTB\sphericalangle = 90°$. Tehát az $FTC\sphericalangle = FTB\sphericalangle + BTC\sphericalangle = 180°$, vagyis a C, a T és az F pontok egy egyenesen vannak.

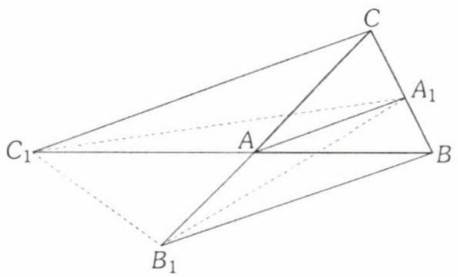
c) Az ábra szerint $H \in AB$, AD merőleges AB-re, így AD párhuzamos TH, a megfelelő szögek váltószögek, és $FE : CD = 1 : 4$, a hasonlóság aránya 1 : 4.

Az FET háromszög és a DTC háromszög hasonlóak, $\frac{TH}{AD} = \frac{ET}{DE}$, azaz $\frac{TH}{a} = \frac{x}{a+x}$, ahonnan $\frac{TH}{a} = \frac{\frac{a}{4}}{a+\frac{a}{4}}$ alapján $TH = \frac{a}{5}$.

Mivel $T_{ABCD} = a^2$ és $T_{TEF} = \frac{EF \cdot TH}{2} = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{5}}{2} = \frac{a^2}{40}$, a TEF háromszög területe $\frac{1}{40}$ része az $ABCD$ négyzet területének.

Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja A_1. Legyenek B_1 az AC egyenesnek, illetve C_1 az AB egyenesnek olyan pontjai, melyekre AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy $t_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot t_{ABC}$!

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területét az AA_1B_1, AA_1C_1 és AB_1C_1 háromszögek területének összegeként fogjuk meghatározni.



Vizsgáljuk meg először az AA_1BB_1 négyszöget! Mivel AA_1 párhuzamos BB_1-gyel, ezért AA_1BB_1 trapéz. Ebből következik, hogy AA_1B_1 és AA_1B háromszögek területe egyenlő, hiszen a közös AA_1 oldalhoz tartozó magasságaik egyenlők.

$$t_{AA_1B_1} = t_{AA_1B} \qquad (1)$$

Hasonlóképpen; AA_1CC_1 trapéz, így az AA_1C_1 és AA_1C háromszögek területe egyenlő,

$$t_{AA_1C_1} = t_{AA_1C} \qquad (2)$$

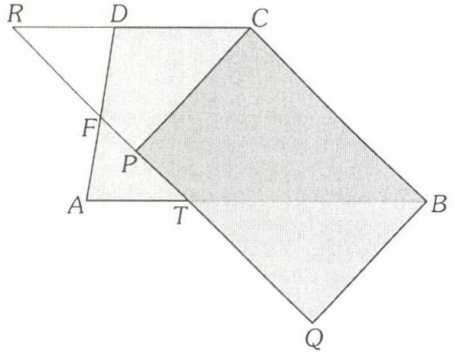
Mivel BB_1 párhuzamos CC_1-gyel, ezért BB_1CC_1 ugyancsak trapéz, ebből következik, hogy pl. CC_1B_1 és CC_1B háromszögek területe egyenlő. Ha most e két háromszög területéből kivonjuk CC_1A háromszög területét (tehát egyenlő területekből egyenlő területet vonunk ki), akkor a megmaradó AB_1C_1, illetve ABC háromszögek területe is nyilván egyenlő, $t_{AB_1C_1} = t_{ABC}$. Ez utóbbit, valamint (1)-et és (2)-t összeadva kapjuk, hogy

$$t_{AA_1B_1} + t_{AA_1C_1} + t_{AB_1C_1} = t_{AA_1B} + t_{AA_1C} + t_{ABC}.$$

A kapott egyenlőség bal oldala éppen a keresett $A_1B_1C_1$ háromszög területe. A jobb oldal első két tagja $t_{AA_1B} + t_{AA_1C} = t_{ABC}$, így $t_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot t_{ABC}$, tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög keresett területe az eredeti ABC háromszög területének kétszerese.

Megjegyzés: Érdemes még egyszer kiemelni a feladat egy tanulságát! A trapéz átlói a trapézt négy darab háromszögre bontják; e háromszögek közül a trapéz száraira illeszkedő háromszögek területe mindig egyenlő.

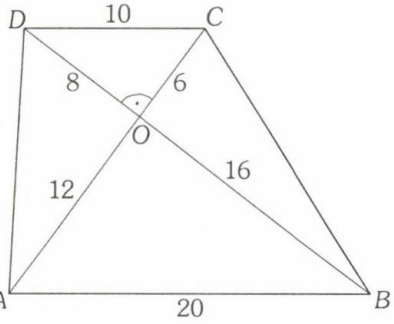
Az *ABCD* trapéz *BC* szárának végpontjaiban merőlegeseket állítunk a *BC* szárra. Az *AD* szár *F* felezőpontján át *BC* szárral húzott párhuzamos egyenes az előbbi merőlegeseket *P*, illetve *Q* pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy *BCPQ* téglalap területe egyenlő az *ABCD* trapéz területével!



Az *F* ponton átmenő, *BC* szárral párhuzamos egyenes és az *AB* alap egyenesének metszéspontját *T*-vel, az egyenes és a *CD* oldal egyenesének metszéspontját *R*-rel jelöltük. Nyilván az *RTBC* négyszög paralelogramma. A *PCBQ* téglalap területe egyenlő az *RTBC* paralelogramma területével, hiszen mindkét négyszögnek egy oldala *BC*, és a hozzá tartozó magasságok is egyenlők. Mivel *F* az *AD* szakasz felezőpontja, ezért az *RFD* és az *FAT* háromszögek egybevágóak. Így az *RTBC* paralelogrammából az *RFD* háromszöget áthelyezve az *FAT* háromszög helyzetébe, éppen az *ABCD* trapézt kapjuk. Összefoglalva tehát: $T_{PQBC} = T_{RTBC} = T_{ABCD}$.

Az *ABCD* trapézban *AB* ∥ *CD*, *AB* = 20 cm, *CD* = 10 cm, *DB* = 24 cm és *AC* = 18 cm. Számítsuk ki a trapéz területét!

Mivel *AB* ∥ *CD* és *AC*, valamint *BD* szelők, ezért $AOB_\triangle \sim OCD_\triangle$ (szögek egyenlősége).



Tehát $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{20}{10} = 2$, ahonnan

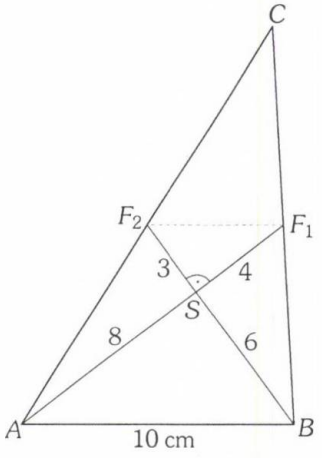
$$\frac{OA}{OA+OC} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{OA}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow OA = 12 \text{ cm}.$$

$$\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OD}{OD+OB} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{OD}{24} = \frac{1}{3},$$

$OD = 8$ cm, így $OB = 24 - 8 = 16$ (cm).

Mivel az $ODC_\triangle$-ben $6^2 + 8^2 = 10^2$ igaz, így a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében $COD\sphericalangle = 90°$. A trapéz átlói merőlegesek egymásra. A trapéz területe $= \frac{e \cdot f}{2} = \frac{24 \cdot 18}{2} =$ $= 216$ (cm^2).

Egy háromszög egyik oldala 10 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala 9 cm, illetve 12 cm. Mekkora a háromszög területe?



Mivel a súlyvonalak a csúcstól távolabbi harmadolópontban metszik egymást, $AS = 8$ cm és $BS = 6$ cm. *ABS* háromszög derékszögű, mert $AS^2 + BS^2 = AB^2$, így $t_{ABS} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ (cm^2).

Az *ABS* háromszög derékszögű, ezért az SBF_1 háromszög, az SBF_2 háromszög és az F_2SF_1 háromszög is az.

$$t_{ABS} = 24 \text{ (cm}^2\text{)},$$

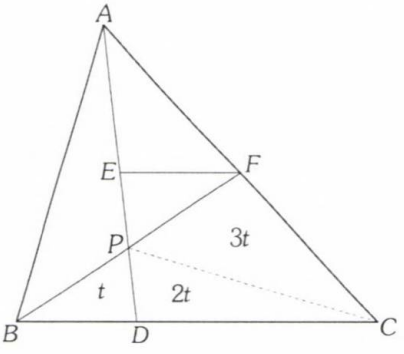
$$t_{SBF_1} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$t_{ASF_2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$t_{SF_1F_2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)},$$

így a $t_{ABF_1F_2} = 54$ (cm^2), $F_1F_2C_\triangle \sim ABC_\triangle$ és a hasonlóság aránya 1 : 2, a területek aránya $t_{F_1F_2C} : t_{ABC} = 1 : 4$. Az ABF_1F_2 trapéz területe az ABC háromszög területének $\frac{3}{4}$ része. Ezért a keresett terület $54 : \frac{3}{4} = 72$ (cm^2).

Az *ABC* háromszög *AC* oldalának felezőpontja legyen *F*, *BC* oldalának *B*-hez közelebbi harmadolópontja pedig *D*. Az *AD* és *BF* szakaszok metszéspontját jelölje *P*. Határozzuk meg a *DCFP* négyszög és a *BDP* háromszög területének arányát!

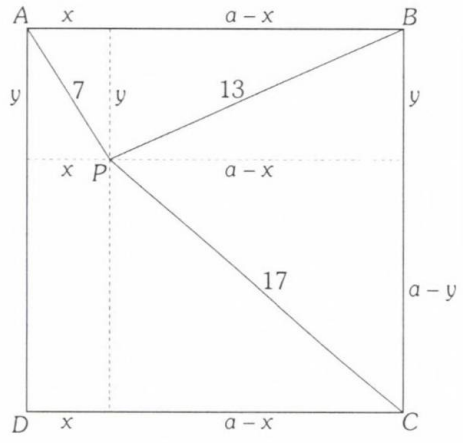


Húzzunk párhuzamost *F*-en keresztül *BC*-vel. Mivel *F* felezőpont, ezért *EF* az *ADC* háromszög középvonala, így $EF = \frac{1}{2}DC = BD$, ezért $EF = \frac{1}{3}BC$, ekkor viszont *BDFE* négyszög paralelogramma. Ebből következik, hogy *P* felezi a *BF* szakaszt. Tehát *BCP* és *PCF* háromszögek területe egyenlő. Mivel *BD* szakasz a *DC* fele, ezért a *BDP* háromszög területe a *PDC* háromszög területének a fele. A fentiekből következik, hogy a *DCFP* négyszög területe a *BDP* háromszög területének az ötszöröse.

Az *ABCD* négyzet belsejében lévő *P* pont távolsága a három csúcstól sorra *PA* = 7 cm, *PB* = 13 cm és *PC* = 17 cm. Számítsuk ki a négyzet területét!

A négyzet oldala legyen: *a*. A keletkezett derékszögű háromszögekre felírjuk Pitagorasz tételét.

I. $x^2 + y^2 = 7^2$,
II. $(a - x)^2 + y^2 = 13^2$,
III. $(a - x)^2 + (a - y)^2 = 17^2$.



Az algebrai átalakításokat elvégezve:

I. $x^2 + y^2 = 49$,
II. $a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = 169$,
III. $a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - 2ay + y^2 = 289$.

A második egyenlet kétszereséből vonjuk ki az első és a harmadik egyenlet összegét, ahonnan rendezés után $y = x$ adódik. A 7 cm átfogójú derékszögű háromszög befogói egyenlők, azaz egyenlő szárú a háromszög. Hasonlóan a 17 cm átfogójú derékszögű háromszög is. A $PA = 7$ cm, illetve a $PC = 17$ cm szakaszok egy-egy négyzet átlói. A két négyzetátló egy egyenesbe esik, az $APC = 7 + 17 = 24$ (cm), ennyi az eredeti négyzet átlója.

A négyzet területe: $\frac{24 \cdot 24}{2} = 288$ (cm^2).

Az *ABC* háromszög területe 768 cm^2. Legyen az *AB* oldal felezőpontja F_1, az *AC* oldalé F_2, a BF_2 szakaszé *D*, a CF_1 szakaszé *E*. Hány cm^2 a *BDEC* terület?

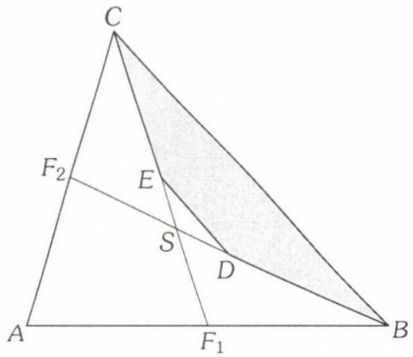
S a háromszög súlypontja, ezért $SC = \frac{2}{3}CF_1$, $SB = \frac{2}{3}BF_2$, $SE = \frac{1}{6}CF_1$ és $SD = \frac{1}{6}BF_2$.

Ekkor viszont $SED_\triangle \sim SBC_\triangle$ és a hasonlóság aránya $k = \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

Az $SBC_\triangle$ területe az $ABC_\triangle$ területének harmad része, azaz 256 cm^2.

Az $SED_\triangle$ területe az $SBC_\triangle$ területének $\frac{1}{16}$ része. Mivel hasonló alakzatok területének aránya

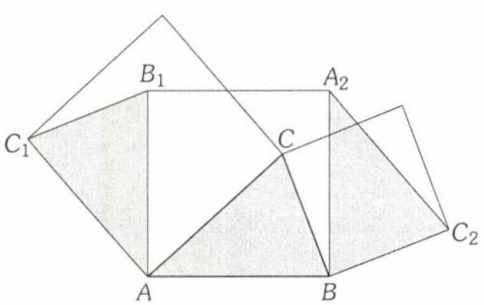
egyenlő a hasonlóság négyzetével, ezért a $BDEC$ négyszög területe az $SBC_\triangle$ területének $\frac{15}{16}$ része, azaz 240 cm^2.



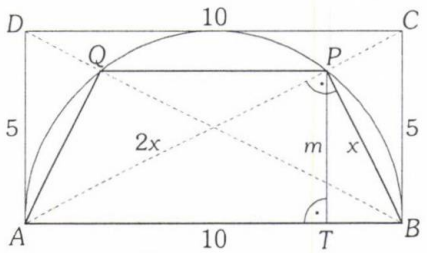
Szerkesszünk az *ABC* háromszög *AC* és *BC* oldalára kifelé négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a négyzeteknek a *C*-vel szemközti csúcsait összekötő egyenes felezi az *AB* oldalra szerkesztett egyik négyzet területét!

Forgassuk el az ABC háromszöget A csúcsa körül $+90°$-kal és a B csúcs körül $-90°$-kal. A keletkező $AB_1C_{1\triangle} \cong BA_2C_{2\triangle}$, s a megfelelő oldalaik egymással párhuzamosak a forgatások miatt. Ezért az $AC_1A_2C_2$ négyszögben C_1A egyenlő és párhuzamos A_2C_2 miatt a négyszög paralelogramma, átlói C_1C_2, illetve AA_2, amelyek felezik egymást.

De AA_2 az AB-re rajzolt egyik négyzet átlója, s a C_1C_2-vel való metszéspontja a szóban forgó négyzet középpontja. Ismeretes, hogy a négyzet középpontján átmenő egyenesek a négyzetet két olyan részre vágják, amelyek közül az egyik a másiknak a négyzet középpontjára vonatkozó tükörképe. Így ezek egybevágóak, azaz területük egyenlő.



Az *ABCD* téglalap oldalai *AB* = 10, *BC* = 5. Az *AB* oldal felezőpontja köré rajzolt *r* = 5 sugarú kör az *AC* átlót *P*-ben, *BD* átlót *Q*-ban metszi. Számítsd ki az *ABPQ* négyszög területét!



Tekintsük az ábrát, melyen m-mel, illetve x-szel jelöltük az $ABPQ$ trapéz magasságát, illetve szárát.

Thalész tételéből következik, hogy $APB\sphericalangle = 90°$. Az ABC és ABP háromszögek hasonlók, hiszen mindkettő derékszögű, és A-nál közös szögük van. Ebből következik, hogy $AP = 2 \cdot BP = 2x$.

Az APB háromszögre felírva Pitagorasz tételét a következőt kapjuk:

$$x^2 + 4x^2 = 100,\ x^2 = 20,\ \text{tehát}\ x = \sqrt{20}.$$

Ezzel már könnyen megkaphatjuk a trapéz magasságát, ha felírjuk kétféleképpen az APB háromszög területét. $\frac{2x \cdot x}{2} = \frac{10 \cdot m}{2}$, azaz $20 = \frac{10m}{2}$, ahonnan $m = 4$.

Szükségünk van még a trapéz PQ oldalára. PTB derékszögű háromszögből.

$$BT^2 = x^2 - m^2 = 20 - 16 = 4,$$

tehát

$$BT = 2,$$

így

$$PQ = AB - 2 \cdot BT = 10 - 4 = 6.$$

A trapéz területe:

$$t_{ABPQ} = \frac{(AB + PQ) \cdot m}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot 4}{2} = \underline{\underline{32}}.$$

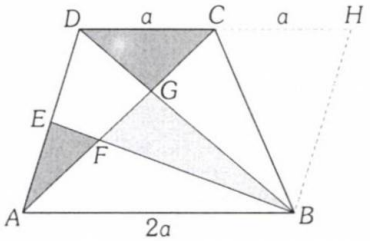
Az *ABCD* trapézban *AB* ∥ *CD* és *AB* = 2 · *CD*. Legyen *E* az *AD* oldal felezőpontja, *BE* ∩ *AC* = {*F*} és *BD* ∩ *AC* = {*G*}. Igazoljuk, hogy $T_{BFG} = T_{AEF} + T_{DGC}$!

A bizonyítandó egyenlőség:

$$T_{BFG} = T_{AEF} + T_{DGC}.$$

Mindkét oldalához hozzáadjuk az $EFGD$ négyszög területét. Azt kapjuk, hogy $T_{BED} = T_{ADC}$.

Kiegészítjük a trapézt $ABHD$ paralelogrammára. Az ábráról leolvasható: $T_{BED} = \frac{1}{2}T_{ABD} = \frac{1}{4}T_{ABHD}$, továbbá $T_{DAC} = \frac{1}{2}T_{DAD} = \frac{1}{4}T_{ABHD}$. Következik, hogy $T_{BED} = T_{ADC}$. Az egyenlő területekből a T_{EFGD} négyszög területét elvéve azt kapjuk, hogy $T_{BFG} = T_{AEF} = T_{DGC}$, amit bizonyítani kellett.

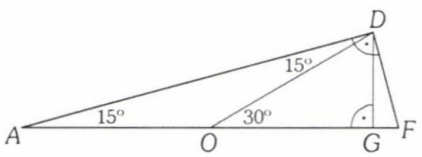


Vegyük fel az *ABCD* négyzet *BC* oldalán az *E* és *CD* oldalán az *F* pontokat úgy, hogy az *AEF* háromszög szabályos legyen. Igazoljuk, hogy az *ABE* és *AFD* háromszögek területének összege egyenlő az *ECF* háromszög területével!

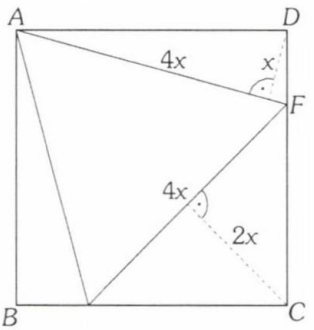
a) Az *ABE* és *AFD* derékszögű háromszögek egybevágóak ($AB = AD$ és $AE = AF$), így $DAF\sphericalangle = 15°$.

Először megmutatjuk, hogy ha az *AFD* háromszög *AF* átfogójához tartozó magassága *DG*, akkor $AF = 4 \cdot DG$.

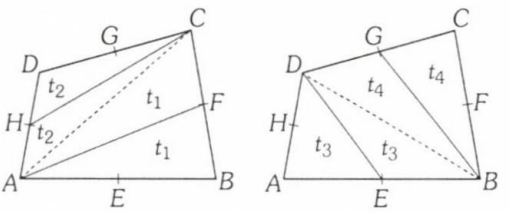
Legyen az *AF* felezőpontja *O*. Ekkor a Thalész-tétel alapján az *AOD* háromszög egyenlő szárú, és így $DOG\sphericalangle = 30°$. Az *OD*-t *OG*-re tükrözve szabályos háromszöget kapunk, tehát $OD = 2 \cdot DG$ és ezért $AF = 2 \cdot AD = 2 \cdot OD = 4 \cdot DG$.



b) Legyen $x = DG$. Ekkor az előbbiek alapján az *AFD* területének kétszerese: $\frac{4x \cdot x}{2} \cdot 2 = 4x^2$, másrészt *ECF* egyenlő szárú derékszögű háromszög, így területe $\frac{4x \cdot 2x}{2} = 4x^2$. Tehát ezzel igazoltuk, hogy az *ABE* és *AFD* háromszögek területének összege egyenlő az *ECF* háromszög területével.



Adott az *ABCD* konvex négyszög, amelynek területe 100 cm². Jelölje *E*, *F*, *G*, *H* rendre az *AB*, *BC*, *CD*, *DA* oldalak középpontját. Számítsátok ki az *ABF*, *BCG*, *CDH* és *ADE* háromszögek területösszegét!



Az *ABC* háromszögben *AF* súlyvonal két egyenlő területű részre osztja a háromszöget, ezeket jelöljük t_1-gyel. Az *ACD* háromszögben *HC* súlyvonal felezi a háromszög területét, ezeket jelöljük t_2-vel.

$$T_{ABCD} = 2t_1 + 2t_2,$$

így

$$\frac{T_{ABCD}}{2} = t_1 + t_2 = T_{ABF} + T_{CDH}. \qquad (1)$$

$$T_{ABCD} = 2t_3 + 2t_4,$$

így

$$\frac{T_{ABCD}}{2} = t_3 + t_4 = T_{ADE} + T_{BCG}. \qquad (2)$$

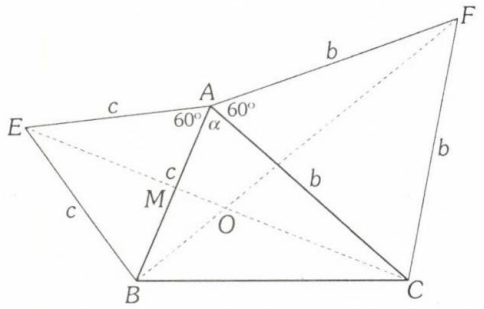
Az (1) és (2) összevetéséből $T_{ABCD} = T_{ABF} + T_{CDH} + T_{ADE} + T_{BCG} = 100\ \text{cm}^2$.

Az *ABC* háromszög oldalaira – a háromszög külső tartományában – vegyük fel az *ABE* és az *ACF* egyenlő oldalú háromszögeket. Igazoljuk, hogy
a) BF = CE
***b) EOB* szög = 60°, ahol $\{O\} = BF \cap CE$.**

a) Az *EAC* háromszög egybevágó a *BAF* háromszöggel. (Két oldal és a közbezárt szög meg-

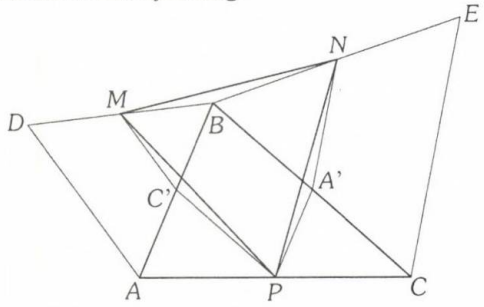
egyezik: b, c és $\alpha + 60$.) Ebből következik, hogy $BF = CE$.

b) Legyen $\{M\} = AB \cap EC$. Összehasonlítjuk az EMA és a BOM háromszögek szögeit.
$AEM\sphericalangle = MBO\sphericalangle$, mert $EAC_\triangle \cong ABF_\triangle$.
$EMA\sphericalangle = BMO\sphericalangle$ (csúcsszögek), ebből következik, hogy $MOB\sphericalangle = EAM\sphericalangle = EOB\sphericalangle = 60°$.



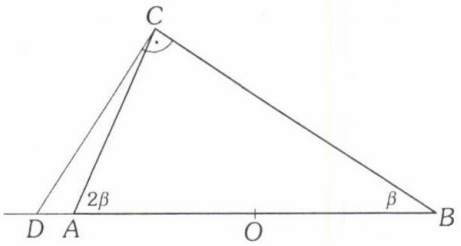
Az ABC háromszög AB és BC oldalaira a háromszögön kívül megszerkesztjük az ABD és BCE egyenlő oldalú háromszögeket. Mutassuk ki, hogy a BD, BE és AC szakaszok felezőpontjai egy egyenlő oldalú háromszög egy-egy csúcsa!

Legyen A' a $BC = a$, C' az $AB = c$ oldal felezőpontja.
$BMN_\triangle \cong C'MP_\triangle \cong A'PN_\triangle$, mivel $BM = C'M = A'P = \frac{c}{2}$, $BN = C'P = A'N = \frac{a}{2}$ és $MBN\sphericalangle = MC'P\sphericalangle = PA'N\sphericalangle = 240° - \beta$, s innen következik a kért tulajdonság.



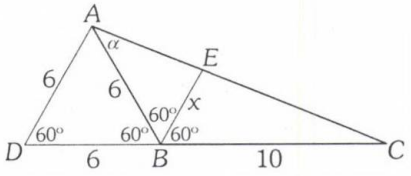
Az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög kétszerese a B csúcsnál levő szögnek. A C csúcsból állítsunk merőlegest a BC oldalra, ez AB egyenesét D-ben metszi. Mennyi az AC és a BD szakaszok aránya?

Legyen O a BCD derékszögű háromszög Thalész körének középpontja. Ekkor BO is és CO is a kör sugara, így $BCO\sphericalangle = \beta$. Az AOC szög az OBC háromszög külső szöge, így egyenlő 2β-val. Azaz az AOC háromszög egyenlő szárú, $AC = OC$ a Thalész-kör sugara, DB a Thalész-kör átmérője. Így $\frac{AC}{BD} = \frac{1}{2}$.



Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm és az ABC szög $= 120°$. Mekkora a B-ből induló szögfelező hossza?

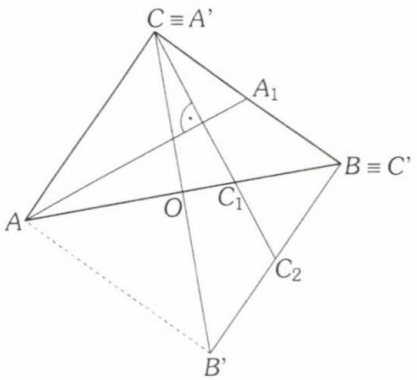
Húzzunk párhuzamost a BE szögfelezővel A-n keresztül.
$ADB\sphericalangle = EBC\sphericalangle = 60°$, $ABD\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$, tehát az ADB háromszög szabályos, így $DB = AD = 6$ cm. Az EBC háromszög hasonló az ADC háromszöghöz (a megfelelő szögek egyenlők), tehát $\frac{x}{AD} = \frac{10}{16}$, ahonnan $x = \frac{10}{16} \cdot AD = \frac{10}{16} \cdot 6 = 3{,}75$. A B-ből induló szögfelező 3,75 cm.



Egy egyenlő szárú derékszögű háromszögben (a C-nél lévő szöge a derékszög) a csúcsból húzott CC_1 egyenes merőleges az AA_1 súlyvonalra. Milyen arányban osztja fel a C_1 pont az AB szakaszt?

A feladat egy lehetséges megoldása a következő: forgassuk el a háromszöget az AB oldal O felezőpontja körül 90°-kal az óramutató járása irányában. (Ha előjeles szögekkel dolgozunk, akkor ez $-90°$-os szöget jelent.) Mivel egyenlő szárú derékszögű háromszöget forgatunk el, ezért az A csúcs képe C lesz, C csúcs képe B, B

képét B'-nek nevezzük. A forgatás távolságtartó transzformáció, ezért $AC = CB = BB'$. Ugyanabban a síkban $AC \perp CB$ és $CB \perp BB'$, tehát $AC \parallel BB'$. Tekintsük az $AB'BC$ négyszöget! Tudjuk, hogy a C és B csúcsoknál levő szögei derékszögűek.

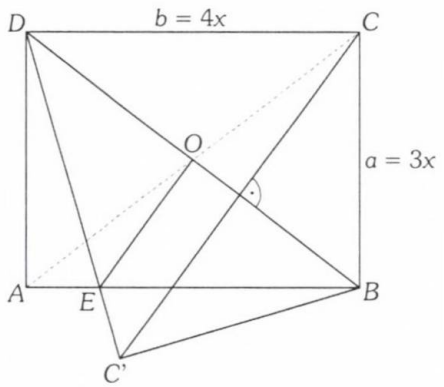


Van egy párhuzamos és egyenlő oldalakból álló oldalpárja, tehát a négyszög paralelogramma. Ebből következik, hogy minden szöge derékszög. Mivel $AC = CB$, azaz szomszédos oldalai is egyenlők, a paralelogramma tulajdonságaiból pedig következik, hogy a CB oldallal szemközti oldala, AB' is ugyanakkora, mint a másik három, vagyis az $AB'BC$ négyszög derékszögű rombusz, azaz négyzet.

Hosszabbítsuk meg a CC_1-et! Ez BB'-ből a C_2 pontot metszi ki. Vizsgáljuk meg, hogy az ACA_1 háromszög képe mi lesz az elforgatás után. AA_1 képe CC_2 lesz, mert A képe C és $AA_1 \perp CC_1$ és CB szakasz képe BB', tehát A_1 képe CC_1 egyenes és BB' egyenes metszéspontja. Vegyük szemügyre a C_1C_2B háromszöget, és a C_1CA háromszöget! A két háromszög hasonló, mert $CAC_1\sphericalangle = C_1BC_2\sphericalangle = 45°$, hiszen az AB szakasz a négyzet átlója. A közös C_1 csúcsnál levő szögek egyenlők, mert csúcsszögek. Két-két szög egyenlősége biztosítja a két háromszög hasonlóságát. Írjuk fel a megfelelő oldalak arányát! $AC_1 : C_1B = AC : BC_2$. A korábbiak szerint az AA_1 súlyvonal képe a CC_2 szakasz, ezért $BC_2 = \frac{AC}{2}$. Ezek alapján $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{\frac{AC}{2}} = 2$.

Tehát a C_1 pont az AB szakaszt 2 : 1 arányban osztja.

Kivágunk papírból egy téglalapot, amely oldalainak aránya 3 : 4, és a téglalap körülírt körének sugara 8 cm volt. Azután ezt a téglalapot az átlója mentén összehajtottuk, és kaptunk egy ötszöget. Mennyi lett az ötszög kerülete?



Legyen O az $ABCD$ téglalap köré írt kör középpontja. $BD = AC = 16$ cm. Vezessük be a következő jelölést: $DC = DC' = b = 4x$, $BC = BC' = a = 3x$, $BD = AC = c$. Írjuk fel Pitagorasz tételét az ABC derékszögű háromszögre: $(4x)^2 + (3x)^2 = 16^2$, melynek gyöke $x = \frac{16}{5} = 3{,}2$, tehát $a = 9{,}6$ cm és $b = 12{,}8$ cm.

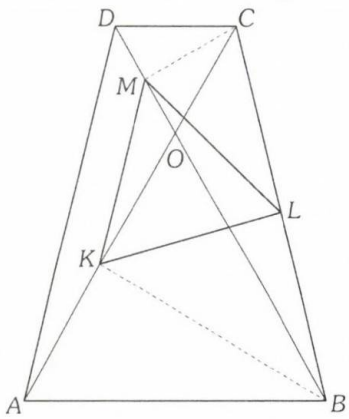
Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az AED háromszögre! A szimmetria miatt E pont B-től és D-től egyenlő távolságra van. Az ötszög EO-ra tengelyesen szimmetrikus. $DE = EB$. Mivel $DC = DC'$ és $DC = AB$, ezért $DC' = AB$ és $DC' - DE = AB - EB$, vagyis $AE = EC'$. Legyen $AE = y$, ekkor $DE = 12{,}8 - y$, így $9{,}6^2 + y^2 = (12{,}8 - y)^2$, melyből $y = 2{,}8$ adódik. Tehát a $BDAEC'$ ötszög kerülete: $k = 16 + 9{,}6 \cdot 2 + 2{,}8 \cdot 2 = 40{,}8$ (cm).

Az *ABCD* trapézban *AB* ∥ *CD*, és átlói az *O* pontban metszik egymást. Legyen *M* a *DO*, *K* az *AO*, *L* pedig *BC* oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy *BC* = 8 cm, az *AOD* szög = 120°, és az *ABD* szög = 60°. Számítsuk ki az *LMK* háromszög kerületét!

Az AOB háromszögben $ABO\sphericalangle = 60°$ és $AOB\sphericalangle = 180° - AOD\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$, ebből következik, hogy a háromszög egyenlő oldalú.

A COD háromszögben $CDO\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 60°$, mert $AB \parallel CD$, BD szelő, $CDO\sphericalangle$ és $ABD\sphericalangle$ váltószögek. A COD háromszög is egyenlő oldalú.

Az AOB egyenlő oldalú háromszögben BK oldalfelező, ezért magasság is, tehát $BKC\sphericalangle = 90°$. A BKC derékszögű háromszögben KL oldalfelező, $KL = \frac{BC}{2} = 4$ cm. Hasonlóan a CMB háromszögben $CMB\sphericalangle = 90°$ és $ML = \frac{BC}{2} = 4$ cm.



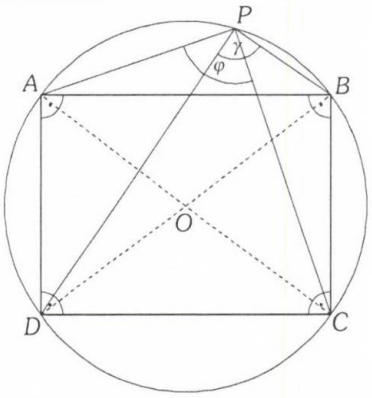
Mivel $AO = BO$ és $CO = DO$, következik, hogy $AC = BD$, tehát az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert átlói egyenlők. Ekkor $AD = BC = 8$ cm. Az AOD háromszögben KM középvonal a feltevés alapján, ezért $KM = \frac{AD}{2} = 4$ cm.

Tehát az LMK háromszög kerülete $K = LM + MK + KL = 12$ cm.

Tekintsük az $ABCD$ téglalap köré írt R sugarú kört! Vegyünk fel e körön egy tetszőleges P pontot! Igazoljuk, hogy az $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ összeg állandó, azaz nem függ a P pont körön levő elhelyezkedésétől!

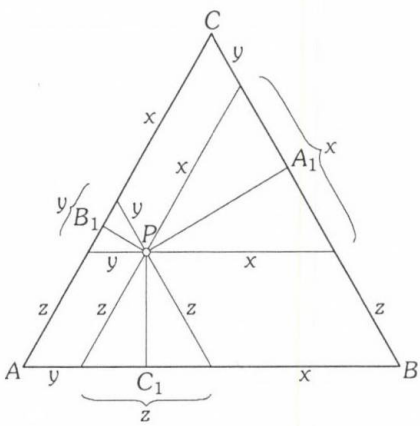
Az AC és DB szakaszok a kör átmérői, hiszen a téglalap átlói felezik egymást az O pontban, s így $OD = OB = OC = OA = R$, azaz $AC = DB = 2 \cdot R$ (Egy másik indoklás: a téglalap szögei 90°-osak, ezért Thalész tételének megfordítása miatt DB és AC átmérők, azaz $DB = AC = 2 \cdot R$.) A P pont rajta van a körön, ezért:

1. eset: Ha P nem egyezik meg a téglalap egyik csúcspontjával sem, akkor Thalész tétele miatt $\gamma = BPD\sphericalangle = 90°$ és $\varphi = APC\sphericalangle = 90°$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a derékszögű APC és a derékszögű BPD háromszögekre! Azt kapjuk, hogy $AP^2 + CP^2 = AC^2$, azaz $AP^2 + CP^2 = (2 \cdot R)^2 = 4R^2$ és $BP^2 + DP^2 = BD^2$, azaz $BP^2 + DP^2 = (2 \cdot R)^2 = 4R^2$. Így $AP^2 + CP^2 + BP^2 + DP^2 = 4R^2 + 4R^2$, tehát $AP^2 + CP^2 + BP^2 + DP^2 = 8R^2$. Azt kaptuk, hogy a vizsgált összeg a $8R^2$ állandó, ami nem függ a P pont körön levő elhelyezkedésétől.



2. eset: Ha P pont megegyezik a téglalap valamelyik csúcspontjával. Legyen például $P = A$, ekkor $AP = 0$, $BP = AB$, $CP = AC$, $DP = AD$. Így $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 0^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = (AB^2 + AD^2) + AC^2 = BD^2 + AC^2 = (2 \cdot R)^2 + (2 \cdot R)^2 = 8R^2$. (Itt $AB^2 + AD^2 = BD^2$-nél Pitagorasz tételét alkalmaztuk.) Tehát ebben az esetben is igazoltuk, hogy a P pont körön levő elhelyezkedésétől nem függ a vizsgált összeg.

Az ABC szabályos háromszög belsejében felvett P pontnak a vetülete az AB oldalra C_1, BC-re A_1, AC-re B_1. Bizonyítsuk be, hogy $AC_1 + BA_1 + CB_1$ egyenlő a háromszög félkerületével!



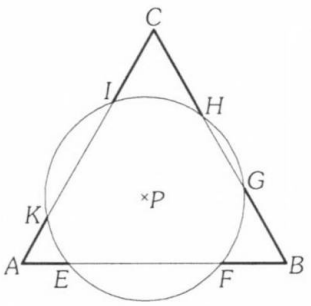
P ponton át húzzunk párhuzamost a háromszög mindhárom oldalával. Így felbontottuk a háromszöget 3 paralelogrammára és 3 kis szabályos háromszögre, ez utóbbiak oldalait jelöljük rendre x, y és z-vel. PA_1, PB_1, PC_1 szakasz az őt tartalmazó kis háromszögnek magasságvonala, így felezi a szemközti oldalt. Emiatt

$$AC_1 + BA_1 + CB_1 =$$
$$= \left(y + \frac{z}{2}\right) + \left(z + \frac{x}{2}\right) + \left(x + \frac{y}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot (x + y + z).$$

Itt $x + y + z = AB$, hiszen az eredeti háromszög minden oldalán x, y, z mindegyike pontosan egyszer fordul elő.
Ezzel állításunkat igazoltuk.

Az *ABC* szabályos háromszög egy belső *P* pontjából kört rajzoltunk az ábra szerint, a körnek a háromszög oldalaival 2-2 közös pontja van. Ezeket a pontokat jelöljük *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K* betűkkel! Bizonyítsuk be, hogy *AE* + *BG* + *CI* = *FB* + *HC* + *AK*!

A feladat megoldása korábban megoldott feladatokra épül, így ezt az olvasóra bízzuk.



Dr. Ambrus András

Dr. Gyapjas Ferenc (1935–2005)

Dr. Gyapjas Ferenc egyetemi adjunktus ötven éven keresztül kötődött az Eötvös Lóránd Tudományegyetemhez: először mint diák, majd hosszú évekig mint oktató, kutató.

1953 és 57 között az ELTE TTK matematika-fizika szakos hallgatója volt. Kiemelkedett hallgatótársai közül, Népköztársasági Ösztöndíjban részesült.

A középiskolai tanári diploma megszerzése után négy évig középiskolában oktatott, 1961-től 1995-ös nyugdíjba vonulásáig volt az ELTE TTK oktatója. Bár hosszú évekig az ELTE TTK Algebra és Számelmélet, illetve Numerikus és Gépi Matematika tanszékeinek oktatója volt, sajátmagát mindig szakmódszertanosnak tartotta. A matematikai, matematikadidaktikai problémákkal szenvedélyesen foglalkozott, nem nyugodott meg, amíg kristálytiszta nem lett számára a probléma, illetve annak megoldása.

Búcsúzunk a matematikustól

Dr. Gyapjas Ferenc mint matematikus, több mint húsz éven át oktatott matematikai tárgyakat az ELTE TTK-n. Alapos, jól felkészült oktató volt. *Lineáris algebra és geometria* jegyzetét ma is használják az oktatók az ELTE TTK-n.

1965–68 között aspirantúrát végzett, 1 hónapon át Vilniusban, 6 hónapon át Moszkvában folytatott tanulmányokat. Közös cikke jelent meg Kátai Imre akadémikussal.

Búcsúzunk a matematikai szakmódszertanos kollégától

Dr. Gyapjas Ferenc ízig-vérig módszertanosnak tartotta magát, a matematikatanítástanulás kérdései érdekelték elsősorban, mindig figyelembe véve a matematika sajátosságait, törvényeit. A matematika szakmódszertannak mint önálló diszciplínának a kialakításában

fontos szerepe volt elsősorban az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen, de Magyarországon általánosságban is. Az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen 1963-ban megalakult Matematikai Módszertani Csoportnak alapításától kezdve tagja volt. Tevékeny részese az 1960-as középiskolai matematikatanítási reformmozgalomnak. Részt vett a gyakorlatban kitűnően bevált Pálmai–Horvai–Czapáry–Gyapjas-féle középiskolai matematika-tankönyvsorozat, tanári segédkönyvek írásában, a tanárok felkészítésében. A kombinatorika, gráfok, valószínűségszámítás és statisztika tanításának kérdéseivel évtizedeket foglalkozott, egy könyve megjelent e témában. (*A valószínűség-számítás és kombinatorika tanításának szakmódszertani és ismeretelméleti problémái* címmel.)

Részt vett egy tanítási kísérletben a budapesti I. László Gimnáziumban, ahol a csoportelmélet egyes részleteit próbálták ki tehetséges középiskolai diákokkal. Ő tervezte a tanítási kísérlet tananyagát, óratervét. Rendre meglátogatta az órákat, a kísérlet tanulságait messzemenően figyelembe vette a Csoportelmélet című szakköri füzetének megírásánál. *Fontosnak tartotta az iskolai valóság figyelembevételét.*

A sors megadta a lehetőséget számára, hogy óriási szakmai, didaktikai tapasztalatait egy újabb tankönyvsorozat társszerzőjeként kamatoztassa a Czapáry–Gyapjas-féle középiskolai matematika tankönyvekben, feladatgyűjteményekben. Összesen 10 könyv jelent meg e sorozatban. Feltétlenül meg kell említenünk feleségét, az ELTE Trefort Ágoston Gyakorlógimnáziumának volt matematika vezetőtanárát, aki mindkét tankönyvsorozat írásánál szakmai partnere, segítője volt férjének, sok részletet alaposan megbeszéltek, megvitattak. A betegség elhatalmasodásával a tankönyvírás, a megvalósítandó feladat adott tartalmat dr. Gyapjas Ferenc életének. Az utolsó részleteknél keze már nem engedelmeskedett, fia vitte föl az anyagot a számítógépre.

Nagyon precíz lektor volt mind szakmailag, mind logikailag, mind nyelvileg; sok kolléga emlékszik hálásan tanácsaira, korrekciós javaslataira. Érvelése a logikailag tökéletes felé igyekezett.

A *matematikadidaktika* mint diszciplína fejlődését nagy figyelemmel kísérte, abban nem egy lezárt, dogmatikus rendszert látott. Sokat beszélgetett a kollégákkal a legújabb tendenciákról, képes volt beépíteni meglevő eszmerendszerébe az újat.

Szívügye volt a *számítógépek iskolai matematikaoktatásban való felhasználása*, részese volt a hőskornak, az ilyen jellegű egyetemi tanárképzési kurzusok anyagai kialakításának, azok kipróbálásának, tanszéki kollégák felkészítésének.

Búcsúzunk a kedves kollégától, az embertől

Dr. Gyapjas Ferenc egyenes, nyílt jellemű ember volt, nézeteit nem váltogatta. Csendes, halk szavú kolléga volt, de a nemes ügyek érdekében racionális érvekkel tudott harcolni. Az ELTE TTK Kari Szakszervezeti Bizottságában sok éven át dolgozott a közösségért. Ha a kollégák kértek valamit tőle, nagy türelemmel foglalkozott mindenkivel, soha nem rohant el, segítőkészsége legendás volt. Mindig az ügy érdekelte, és nem a személyek; az ügyért sokat tudott tenni.

Dr. Gyapjas Ferenc életműve, munkássága nem volt hiábavaló. A matematikai szakmódszertanban maradandót alkotott, tankönyvei révén kollégái és sok-sok tanítványa munkájára lesz még hatással hosszú évekig. Emlékét tisztelettel és szeretettel megőrizzük.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2005. május 31.

Feladatok (270-274.)

270. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalak hossza pozitív egész szám, és az átfogó hossza 2005?

Varga István, Békéscsaba

271. Az

$$x^3 - (p-61)x^2 + (p+44)x - 216 = 0$$

egyenletben válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökei egy mértani sorozat egymást követő tagjai legyenek.

Fitos László, Esztergom

272. Határozzuk meg az adott $ABCD$ téglalap belsejében azon P pontoknak a halmazát, amelyekre $APB\sphericalangle + CPD\sphericalangle = 180°$.

Kiss Zoltán, Pécs

273. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenletet:

$$a^3 + 12a + b^6 = 6a^2 + 7c + 4.$$

Tóth Sándor, Sárospatak

274. Jelölje S_n egy mértani sorozat első n elemének összegét. Van-e olyan pozitív egész k szám, hogy S_{n-k}, S_n, S_{n+k} egy mértani sorozat három egymást követő eleme?

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (255-259. feladatok)

255. Tudjuk, hogy egy háromszög két magassága 6, illetve 12 egység hosszú. Mit állíthatunk a harmadik magasságról?

Megoldás: Legyen a szokásos jelöléseket használva $m_a = 6$, $m_b = 12$. A háromszög kétszeres területére nézve $2T = am_a = bm_b = cm_c$, ahonnan a háromszög-egyenlőtlenség alapján

(1) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} > \frac{1}{m_c}$

(2) $\frac{1}{6} + \frac{1}{m_c} > \frac{1}{12}$

(3) $\frac{1}{m_c} + \frac{1}{12} > \frac{1}{6}$.

(2) mindig teljesül. (1)-ből adódik, hogy $4 < m_c$, (3)-ból pedig kapjuk, hogy $m_c < 12$. Összefoglalva: $4 < m_c < 12$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

256. Határozzuk meg azokat az x, y, z páronként különböző valós számokat, amelyekre

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{(2x+y+z)^2}{x(y+z)} =$$

$$= \frac{(x+2y+z)^2}{y(z+x)} = \frac{(x+y+2z)^2}{z(x+y)}.$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Szükséges feltételek: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x+y \neq 0$, $x+z \neq 0$, $y+z \neq 0$. Ha beve-

zetjük az $S = x + y + z$ jelölést, akkor a rögzített feltételek mellett érvényesek a következő ekvivalenciák:

$$\frac{(2x+y+z)^2}{x(y+z)} = \frac{(x+2y+z)^2}{y(z+x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(S+x)^2(S-y) = x(S+y)^2(S-x)$$

$$\Updownarrow$$

$$S(x-y)(S^2-(x+y)S-3xy) = 0$$

$$\Updownarrow x \neq y$$

$$S(zS-3xy) = 0 \qquad (1)$$

Mivel az egyenletrendszer invariáns az (x, y, z) hármas ciklikus permutációira nézve, ezért felírhatók az

$$S(xS-3yz) = 0 \qquad (2)$$

$$S(yS-3zx) = 0 \qquad (3)$$

egyenletek. Az (1), (2), (3) egyenletek megfelelő oldalainak összegzése után az

$$S(S^2-3(xy+yz+zx)) = 0,$$

ahonnan, figyelembe véve, hogy

$$S^2-3(xy+yz+zx) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right) > 0,$$

adódik, hogy $S = 0$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely olyan valós (x, y, z) számhármas kielégíti az egyenletrendszert, amelyre $xyz \neq 0$, $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$ és $x + y + z = 0$.

Dályay Pál Péter, Szeged
Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 9.

257. *A* és *B* olyan pozitív egész számok a tízes számrendszerben, amelyekre teljesül, hogy $A = 7B$, és *A* számjegyeinek összege kétszer akkora, mint *B* számjegyeinek összege. A *C* számot úgy kapjuk, hogy *B*-t közvetlenül *A* után írjuk. Igazoljuk, hogy *C* osztható 9-cel.

Megoldás: Ha *B* számjegyeinek összege *x*, akkor *A* számjegyeinek összege $2x$. Ezzel

$$A \equiv 2x \pmod 9 \text{ és } B \equiv x \pmod 9.$$

$A = 7B$, ezért $7B \equiv 2x \pmod 9$. Mivel $2B \equiv 2x \pmod 9$, ezért $7B \equiv 2B \pmod 9$, ami ekvivalens azzal, hogy $5B \equiv 0 \pmod 9$, azaz 9 osztója $5B$-nek. Ebből viszont adódik, hogy 9 osztója *B*-nek. Így viszont 9 osztója $A = 7B$-nek is.

Mivel *C* úgy keletkezik, hogy egy 9-cel osztható szám után írunk egy másik 9-cel osztható számot, ezért 9 osztója *C*-nek.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Vannak a feladat feltételének megfelelő számok. Ha $B \leq 10^7$, akkor a feltételeknek megfelelő számok száma: 48006.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 9.

258. Állítsuk elő $\sqrt{k^2+1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ lánctört alakját. (Az $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ alakú kifejezést nevezzük lánctörtnek, ahol az $\{a_n\}$ véges vagy végtelen sorozat első tagja (a_0) egész szám, többi tagja pozitív egész szám.)

Rakonczai György, Budapest

Megoldás: Azonos átalakításokat végezve:

$$\sqrt{k^2+1} = k + \sqrt{k^2+1} - k = k + \frac{\sqrt{k^2+1}-k}{1} =$$

$$= k + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} = k + \frac{1}{k+\sqrt{k^2+1}}.$$

Ezt felhasználva kapjuk a megfelelő lánctört alakot.

$$\sqrt{k^2+1} = k + \frac{1}{k+\sqrt{k^2+1}} = k + \frac{1}{2k + \cfrac{1}{k+\sqrt{k^2+1}}} =$$

$$= k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{2k + \ldots}}}}$$

A keresett lánctört a szokásos jelölést használva: $[k, 2k, 2k, 2k, 2k, \ldots]$.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Tekintsük a következő Pell-egyenletet:

$$x^2 - (k^2+1)y^2 = 1.$$

Ennek legkisebb megoldását megkapjuk az előző lánctörtből, ha csak az első törtig megyünk az előállításban:

$$\frac{x}{y} = k + \frac{1}{2k} = \frac{2k^2+1}{2k},$$

ahonnan $x = 2k^2 + 1$, $y = 2k$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldás.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 8.

259. Legyen p 2-nél nem kisebb pozitív egész szám. Határozzuk meg azon α valós számokat, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \log_p n \rfloor}}{n^{\alpha}}$ sor konvergens. ($\lfloor x \rfloor$ az x valós szám egész része.)

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Azt fogjuk bizonyítani, hogy a sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Legyen $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \log_p n \rfloor}}{n^{\alpha}}$. Tudjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, amiből adódóan konvergens. (Ennek igazolását lásd pl. Pintér Lajos: Analízis I. – Tankönyvkiadó, Budapest 1987. – tankönyv 77–79. oldalán.)

Ha $\alpha \le 0$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat nem konvergál 0-hoz, így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül, tehát ebben az esetben a sor divergens.

Azt az esetet kell még vizsgálnunk, amikor $0 < \alpha \le 1$. Belátjuk, hogy ebben az esetben nem teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium.

Legyen $\varepsilon = 1$ és n_0 tetszőleges pozitív egész. Legyen tovább $n = p^{n_0}$ és $m = p^{n_0+1} - 1$ $(n, m > n_0)$. Ekkor

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| = \frac{1}{(p^{n_0})^{\alpha}} + \frac{1}{(p^{n_0}+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(p^{n_0+1}-1)^{\alpha}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{p^{n_0}} + \frac{1}{p^{n_0}+1} + \ldots + \frac{1}{p^{n_0+1}-1}.$$

A jobb oldalon álló $p^{n_0+1} - p^{n_0}$ darab tag összege nagyobb, mint $\left(p^{n_0+1} - p^{n_0}\right) \cdot \frac{1}{p^{n_0}} = p - 1$.

Mivel $p \ge 2$, azt kaptuk így, hogy $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| \ge \varepsilon$, azaz a sor divergens.

Minden esetet megvizsgáltunk, az állítást belátuk.

Kiss Zoltán, Pécs
Rakonczai György, Budapest
Zachar Zoltán, Tatabánya

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (225-259.); Kamarás Lajos, Pécs (255-258.); Kiss Zoltán, Pécs (255-259.); Nagy Béla, Sarkad (255-257.); Rakonczai György, Budapest (255-259.); Szoldatics József, Kapuvár (255. 2 mód, 256. 2 mód, 257., 258.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (255-258.); Zachar Zoltán, Tatabánya (255-259.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (255-258.).

NAT 2003
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-től kezdődően az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadó által készített kerettantervrendszert az OM akkreditálta, és nyomtatásban megjelent a 17/2004. (V. 20.) rendelet mellékleteként az Oktatási Közlöny 2004/68. számának 593-1488. oldalán. A kerettanterv letölthető az OM honlapjáról, valamint a www.mozaik.info.hu címről.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VESZPRÉM

Egy kombinatorikus kérdés körüljárása

(Pintér Lajos)

Síkidomok a négyzetrácson

(Kosztolányi József)

Egy egyenlőtlenség és alkalmazásai

(Bencze Mihály)

Beszámoló a XIV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

(Dr. Urbán János)

XIII. ÉVFOLYAM 2005 3

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1450 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Egy kombinatorikus kérdés körüljárása
Pintér Lajos
egyetemi docens, Szeged

Síkidomok a négyzetrácson
Kosztolányi József
egyetemi adjunktus, Szeged

Egy egyenlőtlenség és alkalmazásai
Bencze Mihály
tanár, Brassó

Beszámoló a XIV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről
Dr. Urbán János
tanár, Budapest

A XXXIV. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5–8. osztály)

A tanárképző főiskolások 2005. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

Pályázati felhívás Rátz Tanár Úr Életműdíj – 2005

Új könyv a kétszintű érettségihez
Dr. Korányi Erzsébet
vezetőtanár, Budapest

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap 2005 – Gyula
Marczis György
szaktanácsadó, Gyula

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Pintér Lajos

Egy kombinatorikus kérdés körüljárása

Az előadásban egy középiskolai példából indulunk ki, azt megoldjuk, majd kérdéseket teszünk fel. Az előadó szándéka szerint ez egy minta lesz arra, hogy egy középiskolai problémát hogyan dolgozunk ki úgy, hogy néhány kérdést feltéve, azokra válaszolva a feladatot több oldalról világítjuk meg. Természetesen a hallgató (olvasó) más (további) kérdéseket is feltehet, az előadásnak éppen az az egyik célja, hogy erre is rávegye a hallgatót. Az előadó azt gondolja, hogy kissé „sok van" az iskolákban a versenyekből, és bár a matematika egyik legfőbb része a problémákra való válaszolás, a matematika nemcsak ebből áll. Valószínűleg jó dolog a tanulókat kérdések feltevésére, egy probléma „körüljárására", pályamunka, áttekintő dolgozat írására rávenni. Ez a tanulókat olvasásra is kényszeríti.

Itt következik a példa, amivel kapcsolatban mindenki megfogalmazhatja a véleményét.

I. Tekintsük a következő pozitív egész számokat: 1; 2; ...; 20. Igaz-e, hogy bárhogyan is választunk ki közülük tizenegy számot, van közöttük két olyan, amelyek különbsége 10?

Egy megoldás. Rakjuk párba 1-től 20-ig a pozitív egész számokat a következő módon:

(1; 11); (2; 12); (3; 13); ...; (9; 19); (10; 20).

Tíz pár van. Ha tehát tizenegy számot választunk, akkor kell legyen legalább egy olyan pár, amelyikből mind a két számot kiválasztottuk. Egy párba tartozó számok különbsége viszont éppen 10.

Tegyünk fel kérdéseket.

1. Az 1; 2; ...; 20 számok közül kiválasztunk tizenegy számot. A kiválasztott tizenegy szám között van-e két olyan, amelyek különbsége 11?

Erre a kérdésre az a válasz, hogy nem biztos, hogy van ilyen két szám. Legyen ugyanis a kiválasztott tizenegy szám: 1; 2; ... ; 11. Ezek között nincs két olyan, amelyek különbsége 11. Itt a 11 helyett bármely 11-nél nagyobb egész számot véve, az előző példa akkor is választ ad a kérdésre.

2. Mi történik, ha az eredeti példában 10 helyett 9-et veszünk?

Csábító az a gondolat, hogy ha van kettő, amelyek különbsége 10, akkor van két olyan is, amelyek különbsége 9, hisz a 9 kisebb 10-nél. Ez azonban nem igaz, ahogy a következő példa mutatja.
Rakjuk párba számainkat az alábbi módon:

(1; 10); (2; 11); ...; (9; 18); 19; 20.

A 19-nek és a 20-nak tehát nincs párja. Válasszuk ki most minden párból a kisebb számot, ez kilenc darab, és vegyük hozzá a 19-et és a 20-at:

1; 2; 3; ...; 9; 19; 20.

Ez tizenegy szám, és nincs közöttük két olyan, amelyek különbsége 9. Valóban, ha lenne ilyen, akkor az egyik szám a 19, vagy a 20 kellene legyen, de ha ezekből bármelyik adott számot vonjuk is ki, a különbség legalább 10.

3. Mi történik, ha az eredeti példában 9 helyett 8-at mondunk?

Az előbbi eljárás most is jó. Tekintsük a következő párosítást:

(1; 9); (2; 10); ...; (8; 16); 17; 18; 19; 20.

A kiválasztott tizenegy szám legyen minden párból a kisebb és 17; 18; 19. Azaz

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 17, 18; 19.

E számok között nincs két olyan, amelyek különbsége 8.

4. Mi történik, ha az eredeti példában 9 helyett 7-et, illetve 6-ot mondunk?

Az előbbi módon gondolkodunk. Legyen

(1; 8); (2; 9); ...; (7; 14); 15; 16; 17; 18; 19; 20.

Ekkor az

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 15; 16; 17; 18

számok között nincs kettő, amelyek különbsége 7. Ha most a következő párosítást tekintjük:

(1; 7); (2; 8); ...; (6; 12); (13; 19); (14; 20); 15; 16; 17; 18;

akkor az

1; 2; ...; 6; 13; 14; 15; 16; 17

számok között nincs két olyan, amelyek különbsége 6.

5. Tekintsük ezután 9 helyett az 5 esetét.

Ekkor

(1; 6); (2; 7); (3; 8); (4; 9); (5; 10); (11; 16); (12; 17); (13; 18); (14; 19); (15; 20).

Ez most éppen tíz pár, és az 1–20-ig terjedő egész számok mindegyike pontosan egy párban van. Bárhogyan választunk is 1 és 20 között tizenegy számot, valamelyik pár mindkét tagját ki kell választani, így lesz két olyan szám, amelyek különbsége éppen 5.

6. A 4 esete.

Legyen most

(1; 5); (2; 6); (3; 7); (4; 8); (9; 13); (10; 14); (11; 15); (12; 16); 17; 18; 19; 20.

A kiválasztott tizenegy szám

1; 2; 3; 4; 9; 10; 11; 12; 17; 18; 19.

E számok között nincs két olyan, amelyek különbsége 4.

7. A 3 esete.

Ekkor legyen

(1; 4); (2; 5); (3; 6); (7; 10); (8; 11); (9; 12); (13; 16); (14; 17); (15; 18); 19; 20.

Most a tizenegy kiválasztott szám:

1; 2; 3; 7; 8; 9; 13; 14; 15; 19; 20.

E számok között nincs két olyan, amelyek különbsége 3.

8. Nézzük most a 2 esetét.

Tekintsük a következő tíz párt:

(1; 3); (2; 4); (5; 7); (6; 8); (9; 11); (10; 12); (13; 15); (14; 16); (17; 19); (18; 20).

Ez pontosan tíz pár. Bárhogyan választva tizenegy számot, valamelyik pár mindkét tagját ki kell választani, így a kiválasztottak között mindig lesz két olyan szám, amelyek különbsége 2.

9. 1 esetén könnyű a válasz, hisz a kérdés most az, hogy az 1 és 20 közti számok közül tizenegyet kiválasztva, lesz-e közöttük szomszédos?

A számokat rakjuk párba a következő módon:

(1; 2); (3; 4); (5; 6); (7; 8); (9; 10); (11; 12); (13; 14); (15; 16); (17; 18); (19; 20).

Tíz pár van, tizenegy számot választva, valamelyik pár mindkét tagját ki kell választani, így biztosan lesz a kiválasztott számok között két szomszédos.

Érdekességként megjegyezzük, hogy az előbbi meggondolásból következik, hogy mindig van legalább egy olyan szomszédos pár, ahol a kisebbik szám páratlan. Lehetséges, hogy egyetlen szomszédos pár van, például:

1; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20.

Itt egyetlen szomszédos pár van az 1; 2. Az előbbi meggondolásból tehát azt is tudjuk, hogy az nem lehetséges, hogy a kiválasztott tizenegy szám között egyetlen szomszédos pár legyen és e két szám közül a kisebbik páros. Az lehet, hogy pontosan két szomszédos pár van, és ezek közül az egyikben a kisebb szám páratlan, a másikban a kisebb szám páros.

Ilyen tizenegy szám például:

1; 2; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19.

Itt a két szomszédos pár: 1; 2 és 2; 3.

Összegezve, ha az 1; 2; ...; 20 számok közül tizenegyet kiválasztunk, akkor ezek között mindig van két olyan, amelyek különbsége 1, két olyan, amelyek különbsége 2, két olyan, amelyek különbsége 5, és két olyan, amelyek különbsége 10. Más pozitív egész számok esetén ki tudunk választani az adottak közül úgy tizenegy számot,

hogy ezek között nincs két olyan szám, amelyek különbsége ez a pozitív egész szám.

II. Mi történik, ha a példában nem tizenegy, hanem tizenkét számot választunk ki? Tekintsük most az 1; 2; ...; 20 számokat. Milyen $n \geq 1$ esetén igaz az, hogy bárhogyan is választunk ki tizenkettőt az adott számok közül, lesz ezek között két olyan, amelyek különbsége n?

Az előző példában alkalmazott módszert használjuk. Persze azt már tudjuk, hogy az n lehet 1; 2; 5, vagy 10, hisz ha tizenegy kiválasztott szám között van kettő, amelyek különbsége az előző számok közül valamelyik, akkor tizenkét kiválasztott között is van ilyen.
Legyen $n = 10$. Azt már tudjuk, hogy van két kiválasztott szám, amelyek különbsége 10, de egy kicsit többet is ad a módszer. Rakjuk párba a számokat a következő módon:

(1; 11); (2; 12); (3; 13); (4; 14); (5; 15);
(6; 16); (7; 17); (8; 18); (9; 19); (10; 20).

Ha tizenkét számot választunk, akkor legalább két párt ki kell választani, így legalább két pár olyan számunk van, amelyek különbsége 10. Az is lehet, hogy pontosan két ilyen pár van:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 19; 10; 20.

Tegyünk fel kérdéseket!

1. Legyen most $n = 11$.

Az alkalmazott módszerrel:

(1; 12); (2; 13); (3; 14); (4; 15); (5; 16);
(6; 17); (7; 18); (8; 19); (9; 20); 10; 11.

Van kilenc pár és a 10; 11. Ha tizenkét számot választunk, akkor legalább egyik párt ki kell választani, azaz van két olyan kiválasztott szám, amelyek különbsége 11.

2. Legyen $n = 9$.

A párba rendezés legyen most a következő:

(1; 10); (2; 11); (3; 12); (4; 13); (5; 14);
(6; 15); (7; 16); (8; 17); (9; 18); 19; 20.

Tizenkét számot választva valamelyik párt ki kell választani, mert legalább tíz számra van szükségünk, és csak kilenc pár van. Van tehát két olyan kiválasztott szám, amelyek különbsége 9. Az is lehet, hogy pontosan egy pár van, ahogy a következő példa mutatja:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 18; 19; 20.

3. Legyen $n = 8$.

Most

(1; 9); (2; 10); (3; 11); (4; 12); (5; 13);
(6; 14); (7; 15); (8; 16); 17; 18; 19; 20.

Ennek felhasználásával tekintsük a következő tizenkét számot:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 17; 18; 19; 20.

Ezek között nincs két olyan, amelyek különbsége 8.

4. Legyen $n = 7$.

Tekintsük a következő párosítást:

(1; 8); (2; 9); (3; 10); (4; 11); (5; 12);
(6; 13); (7; 14); 15; 16; 17; 18; 19; 20.

A kiválasztott tizenkét szám legyen

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 15; 16; 17; 18; 19.

Ezek között nincs két olyan, amelyek különbsége 7.

5. $n = 6$.

Rakjuk most párba a számokat a következő módon:

(1; 7); (2; 8); (3; 9); (4; 10); (5; 11);
(6; 12); (13; 19); (14; 20); 15; 16; 17; 18.

Válasszuk ki a következő tizenkét számot:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 13; 14; 15; 16; 17; 18.

Ezek között nincs két olyan, amelyek különbsége 6.

6. $n = 4$ esetén a párosítás legyen a következő:

(1; 5); (2; 6); (3; 7); (4; 8); (9; 13); (10; 14);
(11; 15); (12; 16); 17; 18; 19.

A kiválasztott tizenkét szám legyen :

1; 2; 3; 4; 9; 10; 11; 12; 17; 18; 19; 20.

E számok között nincs két olyan, amelyek különbsége 4.

7. Végül legyen $n = 3$:

A párosítás:

(1; 4); (2; 5); (3; 6); (7; 10); (8; 11); (9; 12); (13; 16); (14; 17); (15; 18); 19; 20.

Ha bevesszük a kiválasztott számok közé a 19-et és a 20-at, akkor még tíz szám kell, de csak kilenc pár van, ezért valamelyik párt ki kell választani, ami azt jelenti, hogy a kiválasztott számok között van kettő, amelyek különbsége 3. Ha 19 és 20 közül egyiket, vagy egyiket sem választjuk ki, akkor még több párt kell tekinteni.

Ha most az eredeti példában tizenhárom számot választunk ki, akkor csak az $n = 12$; $n = 8$; $n = 7$; $n = 6$; $n = 4$ eseteket kell megvizsgálni. A már sokszor használt módszert alkalmazzuk, és nem részletezzük úgy, mint eddig.

$n = 12$. A párosítás:

(1; 13); (2; 14); (3; 15); (4; 16); (5; 17); (6; 18); (7; 19); (8; 20); 9; 10; 11; 12.

Mindig van a kiválasztottak között két olyan, amelyek különbsége 12.

$n = 8$. A párosítás:

(1; 9); (2; 10); (3; 11); (4; 12); (5; 13); (6; 14); (7; 15); (8; 16); 17; 18; 19; 20.

Mindig van a kiválasztottak között két olyan, amelyek különbsége 8.

$n = 7$. A párosítás:

(1; 8); (2; 9); (3; 10); (4; 11); (5; 12); (6; 13); (7; 14); 15; 16; 17; 18; 19; 20.

Legyen most a kiválasztott tizenhárom szám:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 15; 16; 17; 18; 19; 20.

E tizenhárom szám között nincs két olyan, amelyek különbsége 7.

$n = 6$. A párosítás:

(1; 7); (2; 8); (3; 9); (4; 10); (5; 11); (6; 12); (13; 19); (14; 20); 15; 16; 17; 18.

Mindig van a kiválasztottak között két olyan, amelyek különbsége 6.

$n = 4$. A párosítás:

(1; 5); (2; 6); (3; 7); (4; 8); (9; 13); (10; 14); (11; 15); (12; 16); 17; 18; 19; 20.

A kiválasztott számok között mindig van két olyan, amelyek különbsége 4.

Még azt nézzük meg, hogy ha az eredeti példában tizennégy számot választunk ki, akkor $n = 7$ esetén mi történik.

$n = 7$. Ugyanazt a párosítást tekintjük, amit tizenhárom választott szám esetén vettünk:

(1; 8); (2; 9); (3; 10); (4; 11); (5; 12); (6; 13); (7; 14); 15; 16; 17; 18; 19; 20.

Tizennégy számot választva valamelyik párt is ki kell választani, így mindig lesz két olyan kiválasztott szám, amelyek különbsége 7.

Foglaljuk táblázatba az eredményt.

Az 1; 2; ... ; 20 számokból választunk. Bárhogyan is választunk ki k darabot, ha a kijelölt számok között van két olyan, amelyek különbsége n, ezt + jellel jelöljük, ha pedig megadható k szám úgy, hogy ezek között nincs két olyan, amelyek különbsége n, akkor ennek jele –. A következő táblázatban az első sorban az n szerepel 1-től 20-ig, az első oszlopban pedig a k 10-től 20-ig (csak 15-ig írjuk ki).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
11	+	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
12	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
13	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–
15	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–

Ha a k 16 és 20 között van, akkor az első $k - 1$ oszlopban + jel, a többiben – jel van (ezt nem írjuk ki). Ha $k < 10$; akkor mindig – jel áll.
Érdekes a $k = 13$ eset, amikor az $n \leq 12$ mellett egyedül az $n = 7$ esetén tudunk megadni 1 és 20 között olyan tizenhárom számot, amelyek között nincs két olyan, amelyek különbsége 7. Ilyen tizenhárom szám például (ahogy már láttuk) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 15; 16; 17; 18; 19; 20.
Egy további kérdés: Ha az 1-től 40-ig terjedő egész számokból kiválasztunk huszonkét darabot, akkor milyen n esetén mondhatjuk, hogy lesz két olyan kiválasztott szám, amelyek különbsége ez az n.

III. Kiinduló feladatunkat általánosan is megfogalmazhatjuk: Az 1; 2; ...; $2n$ számokból, ahol $n \geq 2$, kiválasztunk $n + 1$ számot. Van-e ezek között két olyan, amelyek különbsége n?
Erre nem nehéz a válasz a használt módszerrel. Rakjuk párba a számokat a következő módon:

$$(1; n + 1); (2; n + 2); \ldots; (n; 2n).$$

$n + 1$ számot választva valamelyik párt ki kell választani, így lesz két olyan kiválasztott szám, amelyek különbsége n.
Még két kérdést tegyünk fel.

Az 1; 2; ...; $2n$ számokból ($n \geq 2$), $n + 1$ számot választva lesz-e közöttük két olyan, amelyek különbsége $n + 1$.

A válasz az, hogy nem, amit a következő példa mutat: 1; 2; ...; $n + 1$.

Az 1; 2; ...; $2n$ számokból ($n \geq 2$) $n + 1$ számot kiválasztva lesz-e közöttük két olyan, amelyek különbsége $n - 1$.

Ha most $n = 2$, akkor $n + 1 = 3$; $n - 1 = 1$. Három számot választva az (1; 2), (3; 4) párok valamelyikét ki kell választani, így biztosan lesz a kiválasztott három szám között két olyan, amelyek különbsége 1.

Ha $n \geq 3$; akkor $n - 1 \geq 2$. Rakjuk párba az 1; 2; ...; $2n$ számokat a következő módon:

$(1; n)$; $(2; n + 1)$; ...; $(n - 1; 2n - 2)$; $2n - 1$; $2n$.

Az 1; 2; ...; $n - 1$; $2n - 1$; $2n$ számokat kiválasztva nincs közöttük kettő, amelyek különbsége $n - 1$.

Kérdéseinket persze folytathatnánk tovább is, de talán már régen unalmas az egész probléma.

IV. Az előadás befejezéseként két példát mesélek még el.

Első példa. Mutassuk meg, hogy $\sqrt[n]{2}$ irracionális szám, ha $n \geq 3$. (Persze azt is tudjuk, hogy $\sqrt{2}$ is irracionális, de itt most nem erről van szó.)

A bizonyítás a következő: Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{2}$ racionális szám, azaz előáll két pozitív egész szám p és q hányadosaként. Emeljünk n-edik hatványra, és szorozzuk meg mindkét oldalt q^n-nel. Ekkor $q^n + q^n = p^n$. Ellentmondásra jutottunk, mert jó tíz évvel ezelőtt A. Wiles bebizonyította, hogy az $a^n + b^n = c^n$ Fermat problémának nincs $n = 3$ esetén nullától különböző egész megoldása.
Ez teljesen jó bizonyítás, de szebben még soha nem láttam „ágyúval verébre" lőni.

Második példa. Ez a példa Martin Gardnertől származik. Az Ördög Las Vegasban a játéktermekben sétál, kissé unatkozik, és a következő játékot találja ki. Odafordul a rulettasztalnál érdeklődve álldogáló kövér úrhoz és azt kérdi tőle: „Volna kedve egy fogadáshoz?" „Attól függ" – válaszolja az. „Csak azt nézzük az asztalon, hogy a golyó piros, vagy fekete mezőbe gurul-e. A piros jele P, a fekete jele pedig F. Ön is mond egy hármast, például PPF, én is mondok egy hármast, és figyelni kezdjük a golyót, hogy melyikünk hármasa jön ki előbb. Természetesen a mondott hármas úgy értendő, hogy egymás után jönnek elő a mondott színek. Akinek a hármasa előbb jön elő, az nyer. Ha Ön nyer, én fizetek 25 dollárt, ha én nyerek, Ön fizet 20 dollárt. Mi a véleménye?" A kövér úr magában így gondolkodik: „Annak, hogy egy adott hármas előjöjjön 1/8 a valószínűsége. Bármely hármasnak ugyanennyi a valószínűsége, így az ajánlat kedvező a számomra." Játszani kezdenek és egy idő után a kövér úr azt veszi észre, hogy ő mindig csak fizet, fizet. Véletlen ez, vagy az Ördög (aki természetesen inkognitóban van) beugratta a kövér urat?

Kosztolányi József

Síkidomok a négyzetrácson

I. Először néhány olyan elemi tételt ismertetünk, amelyek zömében azzal kapcsolatosak, hogy előre adott n pozitív egész szám esetén vannak-e olyan speciális síkidomok a koordinátasíkon, amelyek a belsejükben vagy a határukon pontosan n darab rácspontot tartalmaznak. Az ismertetett tételek és bizonyítások érdeklődő középiskolások számára is érthetőek, a felhasznált eszközök tekintetében nem mennek túl a középiskolák tagozatos osztályainak törzsanyagán.

1. tétel: Bármely pozitív egész n esetén létezik a koordinátasíkon olyan kör, amelynek belsejében pontosan n darab rácspont van.

Bizonyítás: Legyen α irracionális szám, q pedig olyan racionális szám, amelyre $2q$ nem egész. Először belátjuk, hogy nincs két olyan rácspont, amelyek egyenlő távolságra lennének a $P(\alpha; q)$ ponttól.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy van két olyan különböző rácspont, $R_1(a; b)$ és $R_2(c; d)$, hogy $PR_1 = PR_2$. Ez azt jelenti, hogy

$$(a-\alpha)^2 + (b-q)^2 = (c-\alpha)^2 + (d-q)^2.$$

A négyzetreemelések elvégzése, rendezés és szorzattá alakítás után kapjuk, hogy

$$2\alpha(a-c) = (b-d)(b+d-2q) + a^2 - c^2.$$

Az egyenlet jobb oldala racionális szám, ugyanis a, b, c, d egészek, $2q$ pedig racionális szám. Mivel α irracionális, ezért a bal oldal akkor és csak akkor racionális, ha $a = c$. Ekkor viszont

$$(b-d)(b+d-2q) = 0.$$

Mivel $2q$ nem egész, ezért ez csak úgy teljesülhet, ha $b = d$.

Ellentmondásra jutottunk indirekt feltevésünkkel, ami azt jelenti, hogy bármely két rácspont különböző távolságra van a P ponttól.

Rendezzük sorozatba a sík rácspontjait a P-től vett távolság növekedése szerint, azaz legyen P_1 a P-hez legközelebbi rácspont, P_2 a következő, és így tovább. Tetszőleges pozitív egész n esetén a P középpontú, P_{n+1}-re illeszkedő kör a belsejében pontosan n darab rácspontot tartalmaz. Ezzel beláttuk az I. tételt.

Bizonyítás nélkül említjük meg, hogy a fenti tételnél egy erősebb tétel is igaz, amely lényegesen speciálisabb körök létezését biztosítja.

2. tétel: (*Hugo Steinhaus*) Bármely pozitív egész n esetén létezik a koordinátasíkon olyan kör, amelynek a területe n, és a belsejében pontosan n darab rácspont van.

André Schinzel lengyel matematikus 1958-ban bizonyította a következőt:

3. tétel: Bármely pozitív egész n esetén létezik a koordinátasíkon olyan kör, amely pontosan n darab rácspontra illeszkedik.

Bizonyítás: A megfelelő kör létezését külön látjuk be páros, illetve páratlan n esetére.

A bizonyítás során felhasználjuk a következő *tételt:* Az $x^2 + y^2 = n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ egyenlet rendezett egész megoldásainak száma: $R(n) = 4(d_1 - d_3)$, ahol d_1 az n $4k+1$ alakú pozitív osztóinak, d_3 pedig az n $4k+3$ alakú pozitív osztóinak száma. (A bizonyítás megtalálható pl. [3] 102–105. oldalán.)

1. eset: Legyen $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$. Belátjuk, hogy az $O\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ középpontú, $r_k = \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{k-1}{2}}$ sugarú kör pontosan $n = 2k$ darab rácspontra illeszkedik.

Tekintsük az $x^2 + y^2 = 5^{k-1}$ egyenletet. Ezen egyenlet rendezett egész megoldásainak száma:

$R(5^{k-1}) = 4k$. Könnyen látható, hogy pontosan $2k$ darab olyan $(x; y)$ megoldás van, ahol x páratlan, y páros, és pontosan $2k$ darab megoldásban x páros, y páratlan.

A $(p; q)$ rácspont pontosan akkor illeszkedik az O középpontú, r_k sugarú körre, ha

$$\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+q^2=\frac{5^{k-1}}{4}.$$

4-gyel szorozva mindkét oldalt, azt kapjuk, hogy

$$(2p-1)^2+(2q)^2=5^{k-1}.$$

Mivel $2p-1$ páratlan, $2q$ páros, ezért a fentiek alapján ennek az egyenletnek pontosan $2k$ darab rendezett egész $(p; q)$ pár megoldása van, ami páros n esetére a tételt bizonyítja.

2. eset: Legyen most $n=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$. Most azt fogjuk bizonyítani, hogy az $O\left(\frac{1}{3};0\right)$ középpontú, $r_k=\frac{1}{3}\cdot 5^k$ sugarú kör pontosan $n=2k+1$ rácspontra illeszkedik.

Tekintsük az $x^2+y^2=5^{2k}$ egyenletet. $R(5^{2k}) = 4(2k+1)=8k+4$. A lehetséges $(x; y)$ megoldások egyik tagja páros, a másik páratlan, és könnyen végiggondolható, hogy a megoldások k darab 8 elemű és 1 darab 4 elemű „családba" sorolhatók. A 8 eleműek szerkezete $(x\neq 0, y\neq 0)$: $(x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; y)$, $(-x; -y)$, $(y; x)$, $(y; -x)$, $(-y; x)$, $(-y; -x)$. A 4 elemű „család": $(0; 5^k)$, $(0; -5^k)$, $(5^k; 0)$, $(-5^k; 0)$. Mivel $5^{2k}=25^k\equiv 1 \pmod 3$, ezért a megoldásokban pontosan az egyik tag osztható 3-mal.

A $(p; q)$ rácspont pontosan akkor illeszkedik az O középpontú, r_k sugarú körre, ha

$$\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+q^2=\frac{5^{2k}}{9},$$

azaz

$$(3p-1)^2+(3q)^2=5^{2k}.$$

Most nézzük meg, hogy az $x^2+y^2=5^{2k}$ egyenlet „megoldáscsaládjaiban" hány olyan pár van, amely megfelel a kör egyenletéből kapott egyenletnek.

A 4 elemű „családban" pontosan egy ilyen pár van, az $(5^k; 0)$ vagy a $(-5^k; 0)$ (csak az egyik!) attól függően, hogy az 5^k vagy a -5^k ad 3-mal osztva 2 maradékot.

Minden egyes 8 elemű „családban" pontosan 2 megfelelő pár van. Ennek igazolása végett tegyük fel, hogy $x\equiv 0 \pmod 3$. Ekkor, attól függően, hogy az y vagy a $-y$ ad 3-mal osztva 2 maradékot (pontosan az egyik ad), az $(y; x)$, $(y; -x)$ vagy $(-y; x)$, $(-y; -x)$ párok megfelelők.

Ezzel beláttuk, hogy pontosan $n=2k+1$ olyan $(p; q)$ rácspont van, amelyik illeszkedik az O közepű, r_k sugarú körre.

1957-ben *George Browkin* bizonyította, hogy igaz állítást kapunk akkor is, ha az 1. tételben a kört négyzetre cseréljük.

4. tétel: Bármely pozitív egész n esetén létezik a koordinátasíkon olyan négyzet, amelynek belsejében pontosan n darab rácspont van.

Bizonyítás: *(Browkin, Sierpinski, Schinzel)* Az alapgondolat ugyanaz, mint az 1. tétel bizonyításánál: valamilyen „metrikus" alapon szigorúan monoton sorozatba rendezzük a sík rácspontjait. Ennek megvalósítása azonban mind gondolati, mind technikai szempontból lényegesen nehezebb lesz.

Tekintsük az

$$f(x; y)=\left|x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|+\left|x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

kétváltozós függvényt. (Ez így „deus ex machina". A bizonyítás során válik majd világossá, hogy miért éppen ezt a függvényt tekintettük.) Be fogjuk látni, hogy nincs két olyan különböző rácspont, amelyek koordinátáira f ugyanazt az értéket venné fel.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy van két olyan különböző rácspont, $R_1(a; b)$ és $R_2(c; d)$, hogy $f(a; b)=f(c; d)$. Az f képletében szereplő abszolútérték-jelektől egy technikai „trükkel" szabadulunk meg. Legyenek p, q, r, s olyan változók, amelyek egymástól függetlenül a -1 és az 1 értéket vehetik fel. Ezekkel a függvényértékek egyenlősége:

$$p\left(a+b\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)+q\left(a\sqrt{3}-b-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$
$$=r\left(c+d\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)+s\left(c\sqrt{3}-d-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A racionális és az irracionális tagok különválasztása után kapjuk, hogy

$$pa-\frac{p}{3}-qb-rc+\frac{r}{3}+sd=$$
$$=\sqrt{3}\left(rd+sc-\frac{s}{3}-pb-qa+\frac{q}{3}\right).$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$pa-qb-rc+sd+\frac{r-p}{3}=0$$

és

$$rd+sc-pb-qa+\frac{q-s}{3}=0.$$

Mivel minden egyes paraméter egész értéket jelöl, ezért ezek az egyenletek csak úgy teljesülhetnek, ha $p = r$ és $q = s$. Ezt figyelembe véve

$$p(a-c)+q(d-b)=0$$

és

$$p(d-b)+q(c-a)=0.$$

Az első egyenletet p-vel, a másodikat q-val szorozva, az elsőből a másodikat kivonva, majd a kapott egyenlet jobb oldalát szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(a-c)(p^2+q^2)=0.$$

Mivel $p^2 + q^2 = 2$, ezért a fenti egyenletből következik, hogy $a = c$. Ez viszont a fentiek alapján maga után vonja a $b = d$ teljesülését is. Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy f különböző rácspontok esetén különböző értékeket vesz fel.

Az f függvény geometriai jelentőséggel bír. (Most oldjuk fel valamelyest a „deus ex machinát".)

A $P(x; y)$ pontnak az $x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}=0$ egyenletű l_1 egyenestől vett d_1 távolsága

$$d_1=\left|\frac{x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+3}}\right|,$$

ahonnan

$$\left|x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|=2d_1.$$

Hasonlóan az $x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$ egyenletű l_2 egyenesnek a $P(x; y)$ ponttól vett d_2 távolsága

$$d_2=\left|\frac{x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+3}}\right|,$$

így

$$\left|x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=2d_2.$$

Könnyen látható, hogy l_1 és l_2 merőlegesek egymásra, és egyszerű számolással adódik, hogy metszéspontjuk az $M\left(\frac{1}{3};0\right)$ pont. Így az $f(x; y) = 2d_1 + 2d_2$ annak a téglalapnak a kerülete, amelynek két szomszédos oldalegyenese l_1 és l_2, az M ponttal szemközti csúcsa $P(x; y)$. Láttuk, hogy ha P végigfut az összes rácspontokon, akkor f értékei páronként különbözők, így a rácspontok szigorúan monoton sorozatba rendezhetők aszerint, hogy általuk és az M pont mint átellenes csúcs által meghatározott téglalap kerülete mekkora. Legyen P_1-re ez a kerület a legkisebb, P_2-re a második legkisebb, és így tovább.

Jelölje a_n az f függvény értékét (a megfelelő téglalap kerületét), és tekintsünk két újabb függvényt:

$$h(x; y)=x\left(1+\sqrt{3}\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

és

$$g(x; y)=x\left(1-\sqrt{3}\right)+y\left(1+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Legyen n tetszőleges, de rögzített pozitív egész, és tekintsük a következő négy egyenest:

$$h(x; y) = a_{n+1},\quad h(x; y) = -a_{n+1},$$
$$g(x; y) = a_{n+1},\quad g(x; y) = -a_{n+1}.$$

Ennek a négy egyenesnek a segítségével fogunk a tételnek megfelelő négyzetet konstruálni. Világos, hogy a h által meghatározott két egyenes párhuzamos, és ugyanez igaz a g által meghatá-

rozott két egyenesre is. Könnyen látható az is, hogy a h által meghatározott két egyenes merőleges a g által meghatározott két egyenesre, így ez a négy egyenes egy téglalapot fog közre. Ennél több is igaz, nevezetesen az, hogy ez a téglalap négyzet (a részletes számításoktól most eltekintünk).

A fenti négy egyenes által közrefogott négyzet pontosan azokat a $P(x; y)$ rácspontokat tartalmazza a belsejében, amelyek koordinátáira

$$|h(x; y)| < a_{n+1} \quad \text{és} \quad |g(x; y)| < a_{n+1}.$$

Némi számolással igazolható, hogy ez a két egyenlőtlenség együtt ekvivalens az

$$\left|\frac{h(x; y) + g(x; y)}{2}\right| + \left|\frac{h(x; y) - g(x; y)}{2}\right| < a_{n+1}$$

egyenlőtlenséggel. h és g képletét beírva a fenti egyenlőtlenség bal oldalára, rövid számolással adódik, hogy bal oldalon az f függvény található, így az egyenlőtlenségünk:

$$f(x; y) < a_{n+1}.$$

Ez pedig az eddigiek alapján azt jelenti, hogy h és g által meghatározott négy egyenes által közrefogott négyzet belsejében pontosan n darab rácspont van, $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Mivel n tetszőleges volt, ezért ez a tény a tételt bizonyítja.

Schinzel és *Kulikowski* bebizonyították, hogy az 1. és 4. tétel speciális esetei a következő általános tételnek:

5. tétel: Bármely korlátos és konvex K síkbeli alakzat, és bármely pozitív egész n esetén van olyan K-hoz hasonló alakzat a síkon, amely a belsejében pontosan n darab rácspontot tartalmaz.

II. A következőkben a bizonyítás nélkül ismertetendő tételek mindegyike arra vonatkozóan fogalmaz meg elegendő, illetve szükséges és elegendő feltételeket, hogy bizonyos speciális síkbeli alakzatoknak milyeneknek kell lenniük ahhoz, hogy tartalmazzanak rácspontot, illetve bizonyos számú rácspontot a belsejükben vagy a határukon.

6. tétel: Ahhoz, hogy egy a és b hosszúságú ($a \le b$) szomszédos oldalakkal rendelkező téglalap bárhol elhelyezve a koordinátasíkon a belsejében vagy a határán tartalmazzon legalább egy rácspontot, az szükséges és elegendő, hogy $a \ge 1$ és $b \ge \sqrt{2}$ teljesüljön.

Ennek a tételnek egy lehetséges bizonyítása megtalálható például [2] 40–44. oldalán.

7. tétel: (*Blichfeldt*) Ha egy síkbeli alakzat területe nagyobb, mint n ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor eltolható úgy a koordinátasíkon, hogy az eltolt alakzat a belsejében $n + 1$ rácspontot tartalmazzon.

Egy bizonyítás megtalálható például [4] 281. oldalán.

A 7. tételnek mintegy kiegészítő tétele a következő tétel.

8. tétel: Ha egy síkbeli alakzat területe kisebb, mint 1, akkor eltolható úgy a koordinátasíkon, hogy az eltolt alakzat a belsejében ne tartalmazzon rácspontot.

Bizonyítás található [4] 282. oldalán.

9. tétel: (*Minkowski*) Ha a koordinátasíkon egy origóra szimmetrikus konvex alakzat területe nagyobb 4-nél, akkor a belsejében vagy a határán tartalmaz még legalább egy origótól különböző rácspontot.

Ennek a nevezetes tételnek *Hajós György* alapgondolatát felhasználó bizonyítása található [4] 280–281. oldalán.

Irodalom

[1] Ross Honsberger: Mathematical Gems, The Mathematical Association of America, 1973.

[2] C. D. Olds – Anneli Lax – Giuliana Davidoff: The Geometry of Numbers, The Mathematical Association of America, 2000.

[3] I. Niven – H. S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[4] Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999.

Bencze Mihály

Egy egyenlőtlenség és alkalmazásai

Tétel: Ha $a_{ij} > 0$ ($i = 1, 2, ..., n$ és $j = 1, 2, ..., m$), akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{m^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)} \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_{ij}}.$$

Bizonyítás: Alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felírhatjuk, hogy

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) \ge \prod_{i=1}^{n}\left(m \cdot \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} a_{ij}}\right) = m^n \cdot \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}$$

vagy

$$\frac{m^n}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)} \le \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}}. \qquad (1)$$

Hasonló gondolatmenettel következik, hogy

$$\frac{m}{\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}} \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_{ij}}. \qquad (2)$$

(1) és (2) összeszorzásával a kívánt egyenlőséget kapjuk.

1. Alkalmazás: Ha $a_k, b_k > 0$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor

$$\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)} \le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} b_k}.$$

Bizonyítás: A tételben legyenek $m = 2$, $a_k = a_{k1}$, $b_k = a_{k2}$ ($k = 1, 2, ..., n$).

2. Alkalmazás: Ha $x_k > 0$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{sh} x_k}\right)^2 \ge 2^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch} x_k}\right)^2.$$

Bizonyítás: Az 1. alkalmazásban legyenek $a_k = 1$ és $b_k = \operatorname{sh}^2 x_k$ ($k = 1, 2, ..., n$).

3. Alkalmazás: Ha $x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin x_k}\right)^2 + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x_k}\right)^2 \ge 2^{n+1}.$$

Bizonyítás: Az 1. alkalmazásban legyenek $a_k = 1$ és $b_k = \operatorname{tg}^2 x_k$ ($k = 1, 2, ..., n$).

4. Alkalmazás: Ha $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 y_1 > z_1^2$, $x_2 y_2 > z_2^2$, akkor

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \le \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

(NMO, 1969)

Bizonyítás: Alkalmazva a tételt $m = n = 2$ esetre felírhatjuk, hogy

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \le \frac{8}{\left(\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2}\right)^2 - (z_1 + z_2)^2} =$$

$$= \frac{8}{\left(\left(\sqrt{x_1 y_1} - z_1\right) + \left(\sqrt{x_2 y_2} - z_2\right)\right)\left(\left(\sqrt{x_1 y_1} + z_1\right) + \left(\sqrt{x_2 y_2} + z_2\right)\right)} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\sqrt{x_1 y_1} - z_1\right)\left(\sqrt{x_1 y_1} + z_1\right)} + \frac{1}{\left(\sqrt{x_2 y_2} - z_2\right)\left(\sqrt{x_2 y_2} + z_2\right)} =$$

$$= \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

5. Alkalmazás: Legyen $A_kB_kC_kD_kA'_kB'_kC'_kD'_k$ derékszögű téglatest, melynek a_k, b_k, c_k az oldalai, d_k az átlói ($k = 1, 2, ..., n$). Igazoljuk, hogy

$$\frac{3^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} d_k^2} \le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k^2} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} b_k^2} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} c_k^2} !$$

Bizonyítás: Legyenek a tételben $m = 3$, $x_{k1} = a_k^2$, $x_{k2} = b_k^2$, $x_{k3} = c_k^2$ ($k = 1, 2, ..., n$).

6. Alkalmazás: Jelölje a_k, b_k, c_k az $A_kB_kC_k$ háromszögek oldalait, s_k a félkerületet ($k = 1, 2, ..., n$). Igazoljuk, hogy

$$\frac{3^{n+1}}{2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} s_k} \le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} b_k} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} c_k} !$$

Bizonyítás: A tételben legyenek $m = 3$, $x_{k1} = a_k$, $x_{k2} = b_k$, $x_{k3} = c_k$ ($k = 1, 2, ..., n$).

7. Alkalmazás: Igazoljuk, hogy

1. $m\left(\frac{2}{m+1}\right)^n \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k}\right)^n$,

2. $m\left(\frac{6}{(m+1)(2m+1)}\right)^n \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n}$,

3. $m\left(\frac{4}{m(m+1)^2}\right)^n \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k}\right)^{3n}$!

Bizonyítás: A tételben legyenek $a_{ij} = i^\alpha$ ($i = 1, 2, ..., n$), ($j = 1, 2, ..., m$) és $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

8. Alkalmazás: Igazoljuk, hogy

1. $(m+1)\left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n \le \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{\binom{m}{k}}\right)^n$,

2. $(m+1)\left(\frac{m+1}{\binom{2m}{m}}\right)^n \le \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{\binom{m}{k}}\right)^{2n}$!

Bizonyítás: A tételben legyenek $a_{ij} = \binom{m}{j}^\alpha$, ahol $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \in \{0, 1, ..., m\}$ és $\alpha \in \{1, 2\}$.

9. Alkalmazás: Jelölje F_k a k-adik Fibonacci-féle számot. Igazoljuk, hogy

$$m\left(\frac{m}{F_{m+2}-1}\right)^n \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{F_k}\right)^n !$$

Bizonyítás: A tételben legyenek $a_{ij} = F_j$, ahol $i \in \{1, 2, ..., n\}$ és $j \in \{0, 1, ..., m\}$.

Ha L_k jelöli a k-adik Lucas-féle számot, akkor:

10. Alkalmazás: Igazoljuk, hogy

1. $\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} F_{m_k+2}} \le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} F_{m_k}} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} F_{m_k+1}}$,

2. $\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} L_{m_k+2}} \le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} L_{m_k}} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} L_{m_k+1}}$!

Bizonyítás: A tételben legyenek $m = 2$ és $a_{i1} = F_{m_i}$, $a_{i2} = F_{m_i+1}$, valamint $a_{i1} = L_{m_i}$, $a_{i2} = L_{m_i+1}$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Irodalom

[1] Bencze Mihály: Egyenlőtlenségek (kézirat), 1982.

[2] Octogon Mathematical Magazine (1993–2005) gyűjteménye.

Dr. Urbán János

Beszámoló a XIV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A XIV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt 2005. március 20–23-ig Miskolcon, a Földes Ferenc Gimnázium rendezte meg. A verseny fő szervezője a gimnázium igazgatója, Veres Pál és a többiek, akik munkáját segítették, elsősorban a gimnázium tanárai, mindent elkövettek, hogy a Magyarországról és a szomszédos országok magyarlakta területeiről érkezett, közel 250 vendég versenyező és kísérő tanár otthon érezze magát Miskolcon.

Az ünnepélyes megnyitó március 20-án a Kossuth Filmszínházban volt. Ezt követte a városnéző séta, amelyen Miskolc főbb nevezetességeivel ismerkedhettek meg a vendégek. Délután a Miskolc Plázában a Sorstalanság című filmet nézhették meg a résztvevők.

A 4 órás verseny március 21-én hétfőn délelőtt zajlott le, a délután folyamán a bírálóbizottság az elkészült dolgozatokat értékelte **Kiss György** egyetemi docens, elnök irányításával.

Este a miskolctapolcai barlangfürdőt élvezhették a verseny résztvevői.

Március 22-én egész napos kirándulások közül választhattunk.

Az első útvonal: Lillafüred, Boldva, Szalonna, Aggtelek-Jósvafő (barlangtúra).

A második útvonal: Vizsoly, Gönc, Telkibánya, Szélphalom, Sárospatak és Tokaj.

A harmadik útvonal: Lillafüred (Anna barlang), Bükk, Eger és Mezőkövesd volt.

Este a diákok részére táncos összejövetelt, a tanárok részére díszvacsorát szerveztek a vendéglátók.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre március 23-án délelőtt a Kossuth Filmszínházban került sor. Itt bejelentették, hogy a következő évi XV. Nemzetközi Matematikaverseny rendezésére délvidéken, Zentán kerül sor.

Az egyes évfolyamok versenyében a következők lettek a díjazottak:

9. osztály

I. díjasok:

Dobribán Edgár, Kolozsvár, Báthory István Liceum
Tóth László, Debrecen, Fazekas M. Gimn.

II. díjasok:

Szirmai Péter, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Boda Árpád, Miskolc, Földes F. Gimn.
Kecskeméti Szabolcs, Budapest, Fazekas M. Gimn.

III. díjasok:

Kis Alpár, Szatmárnémeti, Kölcsey F. Főgimn.
Tokai-Kiss Ákos, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn.
Gombár Tamás, Zenta, Bolyai Tehetséggondozó Gimn.
Halász Gábor, Vác, Boronkay Műszaki Középisk. és Gimn.
Molnár Regő, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.
Csizmadia Laura, Szabadka, Sv. Markovic Gimn.
Kalmár Gergely, Zenta, Bolyai Tehetséggondozó Gimn.
Tófalvi Lehel, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll.

10. osztály

I. díjasok:

Farkas Ádám, Miskolc, Földess F. Gimn.
Lőrinc András, Nagyvárad, Ady Endre Líceum
Szűcs Gábor, Miskolc, Földes F. Gimn.

II. díjasok:

Hujter Bálint, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Nagy Alíz, Nagyvárad, Ady Endre Liceum

III. díjasok:
Páldy Sándor, Galánta, Kodály Zoltán Magyar Gimn.
Varga Gábor, Miskolc, Herman Ottó Gimn.
Máthé Antal-Koppány, Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elméleti Líceum
Szudi László, Bonyhád, Petőfi Sándor, Evangélikus Gimn.
Majoros Csilla, Miskolc, Földes F. Gimn.
Honner Balázs, Győr, Révai Miklós Gimn.

11. osztály

I. díjas:
Patrubány Anna, Kolozsvár, Báthory I. Líceum

II. díjasok:
Erőss Gáspár, Csíkszereda, Márton Áron Gimn.
Molnár András, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Becze Szabolcs, Csíkszereda, Márton Á. Gimn.
Estélyi István, Galánta, Kodály Z. Magyar Gimn.
Farkas Csaba, Székelykeresztúr, Orbán Balázs Líceum

III. díjasok:
Bittner Emese, Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.
Haller István, Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elméleti Líceum
Sebestyén Pál katalin, Kolozsvár, Báthory I. Líceum
Ferenc Ildikó, Szatmárnémedi, Kölcsey F. Gimn.
Csorba János, Győr, Apor Vilmos, Katolikus Iskolaközpont
Gönczi Dávid, Miskolc, Földes F. Gimn.
Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti M. Gimn.
Ureczky Bálint, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Németh Zsolt, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.

12. osztály

I. díjas:
Czank Tamás, Miskolc, Földes F. Gimn.

II. díjasok:
Miklós Gábor, Csíkszereda, Márton Áron Gimn.
Sápi Dénes, Miskolc, Földes F. Gimn.
Lukucz Balázs, Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn.

III. díjasok:
Petényi Franciska, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középisk. és Gimn.
Koreck Péter, Szeged, Radnóti M. Gimn.
Kirilly Miklós, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.
Erős Tamás, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.

A versenyen a következő feladatokat tűzték ki:

9. évfolyam

1. Egy egyetemista ötéves tanulmányai alatt összesen 31 vizsgát tett le. Minden évben több vizsgát tett le, mint az azt megelőző évben, ötödéves korában pedig éppen háromszor annyit, mint az első évben. Hány tárgyból vizsgázott a negyedik évben?

Szabó Magda, Szabadka

2. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hossza legfeljebb akkora, mint a háromszög AB és AC oldalaihoz hozzáírt körök sugarainak számtani közepe.

Vass Iván, Miskolc

3. Az $ABCD$ téglalap köré írt kör kisebbik AB ívén lévő P pontból a téglalap AC és BD átlóira bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek M és N. Mutassuk meg, hogy az MN szakasz hossza független a P pont választásától.

Sipos Elvira, Zenta

4. Vannak-e olyan m és n pozitív egész számok, melyekre teljesül az

$$m(m+1)(m+2)(m+3) = n(n+1)$$

egyenlőség?

Oláh György, Komárom

5. Az $ABCD$ trapéz AC átlója 12, a BD pedig 9 egység hosszú, s ez a két átló merőleges egymásra. Tudjuk még, hogy $AB \cdot CD = 50$. Határozzuk meg az

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

összeg értékét.

Dr. Kiss Sándor, Nyíregyháza

6. Egységnyi élű fakockákból téglatestet építettünk, melynek méretei $10 \times 802 \times 2005$. Hány kis kockát lyukaszt ki az a pontszerű szú, amelyik a téglatest egyik testátlója mentén végigrágja magát!

Fejér Szabolcs, Miskolc

10. évfolyam

1. Adott öt szakasz, melyek közül bármely háromból háromszög szerkeszthető. Mutassuk meg, hogy a szakaszok közül kiválasztható három, melyekből hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni.

Bencze Mihály, Brassó

2. Az ABC és a PQR szabályos háromszögek úgy helyezkednek el a síkban, hogy R az AB szakasznak, C pedig a PQ szakasznak belső pontja, A és P pedig a CR egyenes ugyanazon oldalán vannak. Bizonyítsuk be, hogy az AP és BQ egyenesek párhuzamosak.

Szabó Magda, Szabadka

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^3 - 2004x^2 + rx + 2005 = 0$$

egyenletnek minden r valós együttható esetén legfeljebb egy egész megoldása van.

Oláh György, Komárom

4. Határozzuk meg azokat az m és n pozitív egész számokat, melyekre teljesül az

$$(m^3 + n)(m + n^3) = (m + n)^4$$

egyenlőség.

Erdős Gábor, Nagykanizsa

5. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogóira kifelé szerkesztett négyzetek $ACDE$ és $CBGF$. Az AGF és BDE derékszögű háromszögek AG és BE átfogóinak metszéspontja legyen P, a P-n átmenő, AC-vel, illetve BC-vel párhuzamos egyenesek pedig messék az ABC háromszög oldalait a K és M, illetve az L és N pontokban. Mutassuk meg, hogy a $KLMN$ négyszög szimmetrikus trapéz.

Bíró Bálint, Eger

6. Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, ..., 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, ..., 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 50 akol maradhatott üresen.

Erdős Gábor, Nagykanizsa

11. évfolyam

1. A valós számok (x_n) sorozata a következő módon van definiálva:

$$x_1 = a > 0,\ x_2 = b > 0,$$

$$x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}},\ \text{ha } n \geq 3.$$

Határozzuk meg x_{2005} értékét az a és b függvényeként.

Szabó Magda, Szabadka

2. Egy háromszög oldalaira teljesül az $a^4 + b^4 = c^4$ összefüggés. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a háromszög szögeire

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 2\sin^2\gamma,$$

ahol γ a c oldallal szemközti szög.

Bogdán Zoltán, Cegléd

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Neubauer Ferenc, Munkács

4. Mennyi a tízes számrendszerben felírt

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2005 \cdot 2005!$$

szám utolsó 500 számjegyének összege!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

5. Ezer birkát, melyek a 000, 001, 002, ..., 998, 999 számokkal vannak megjelölve, este a juhászkutyák száz olyan akolba terelnek be, melyek ajtajain a 00, 01, 02, ..., 98, 99 kódok olvashatók. Minden birkának olyan akolban kell éjszakáznia, melynek kódját megkapjuk, ha a birka számának valamelyik számjegyét töröljük. (Az 537-es birka tehát csak az 53, 57 vagy a 37 kódszámú akolba mehet.) Sötétedés előtt minden birka bekerült valamelyik akolba. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 50 akol maradhatott üresen.

Erdős Gábor, Nagykanizsa

6. Bizonyítsuk be, hogy minden x, y valós számpár esetén fennáll a

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \\ + \sqrt{y^2 + 16 - 4y\sqrt{3}} \geq 5$$

egyenlőtlenség.

Dr. Kiss Sándor, Nyíregyháza

12. évfolyam

1. Hány megoldása van az egész számok körében az

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + v^2)$$

egyenletnek?

Szabó Magda, Szabadka

2. A 100 oldalú K konvex sokszög az 1 méter oldalú négyzet belsejében fekszik. Mutassuk meg, hogy K csúcsai közül kiválasztható három úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe kisebb, mint 8 cm^2.

Bencze Mihály, Brassó

3. Az (a_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = 1,$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \text{ ha } n > 1.$$

Határozzuk meg a2005 értékét.

Péics Hajnalka, Szabadka

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben az a és a b oldalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra, akkor

$$5(a^2 + b^2 - c^2) > -8ab,$$

ahol c a háromszög harmadik oldala.

Oláh György, Komárom

5. Igazoljuk, hogy az

$$x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 2 = 0$$

egyenlet egyetlen valós gyöke

$$x = 2 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81}.$$

Kovács Béla, Szatmárnémedi

6. Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész n esetén fennállnak a

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \binom{n+1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \binom{n}{k}}$$

és

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^{n-k}}$$

azonosságok.

Dályai Pál Péter, Szeged

A XXXIV. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5–8. osztály)

Ötödik osztály

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem nagyobb 1000-nél, és a tízes számrendszerben felírt alakjában legalább egy 1-es számjegy van?

2. Egy szabályos hatszög hat csúcsához írj hat pozitív egész számot úgy, hogy bármely két szomszédos csúcshoz írt szám legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb legyen, de bármely két nem szomszédos csúcshoz írt szám legnagyobb közös osztója 1 legyen!

3. Andris és Béla versenyt futnak. A 100 méteres távolságon az első futamban Andris győz, 20 méterrel előzi meg Bélát. A következő futamban Andris 20 méterrel a rajtvonal mögül indul, míg Béla a rajtvonalról. Most is mindketten ugyanolyan sebességgel futnak, mint előbb. Ki győz most, és a győztes mennyivel előzi meg a másikat?

4. Egy 5×5-ös négyzetrácsban különböző nagyságú négyzetek vannak 1×1-estől 5×5-ösig. Összesen hány négyzet van egy ilyen négyzetrácsban, amelynek csúcsai rácspontok, oldalai rácsegyenesek?

Az ötödik osztály feladatainak megoldása

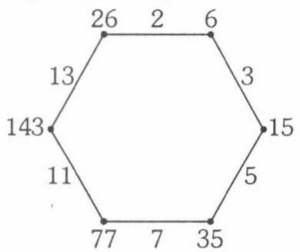
1. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok száma 1000.
Számoljuk össze, hány olyan van közöttük, amelynek tízes számrendszerbeli felírásában nincs 1-es számjegy.

Egyjegyű van	8
kétjegyű	$8 \cdot 9 = 72$
háromjegyű	$8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$
Összesen:	728

A keresett számok száma tehát:

$$1000 - 728 = 272.$$

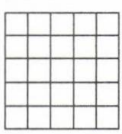
2. Például egy helyes megoldás:



Az oldalakra írt törzsszámok a szomszédos csúcsokhoz írt számok legnagyobb közös osztói. A csúcsokhoz a belőlük kiinduló oldalakra írt törzsszámok szorzatát írtuk.

3. Amíg Andris 100 m-t tett meg, addig Béla 80 m-t, tehát amíg Andris 5 m-t futott, addig Béla 4-et.
A második futamban Andrisnak 120 m-t kellett futni, azaz 24-szer 5 m-t. Ez idő alatt Béla 24-szer 4 m-t, azaz 96 m-t tett meg.
Tehát a második futamban is Andris lett a győztes, és 4 m-rel előzte meg Bélát.

4. A négyzeteknek mondjuk a bal felső csúcsait számoljuk össze.



1×1-es négyzetből van	25
2×2-esből	16
3×3-asból	9
4×4-esből	4
5×5-ösből	1

Összesen tehát 55 négyzet van a négyzetrácsban.

Hatodik osztály

1. Melyik az a négyjegyű, tízes számrendszerbeli szám, amelyik négyszer akkora, mint a számjegyeinek fordított sorrendbe írásával kapott négyjegyű szám?

2. Hét különböző pozitív egész szám összege 100. Mutassuk meg, hogy van köztük három olyan szám, amelyek összege legalább 50!

3. Az 1, 2, 3, ..., 99, 100, 101 számok átlaga (számtani közepe, azaz összegük osztva 101-gyel, a számok számával) 51. Melyik öt egymást követő számot hagyhatjuk el közülük úgy, hogy a megmaradt 96 szám átlaga is 51 legyen?

4. Egy téglatest éleinek aránya 1 : 2 : 3, a téglatest felszíne 352 cm^2. Mennyi a téglatest térfogata?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. Írjuk fel a szorzást és a szóban forgó négyjegyű számokat betűkkel:

$$\overline{ABCD} \cdot 4 = \overline{DCBA},$$

ahol A, B, C, D nem feltétlenül különböző számjegyek.
A csak 1 vagy 2 lehet, mert egy 3-mal kezdődő négyjegyű szám 4-szerese már 5-jegyű, de A páros is, ezért $A = 2$. Ebből következik, hogy $D = 8$.
Mivel B csak 1 vagy 2 lehet, hiszen a 4-szerese egyjegyű és páratlan, mert $4C + 3$ utolsó jegye B, ezért $B = 1$, és ekkor $C = 7$.
A kapott megoldás valóban jó:

$$2178 \cdot 4 = 8712.$$

2. Legyenek a számok csökkenő sorrendben

$$a > b > c > d > e > f > g.$$

Megmutatjuk, hogy $a + b + c \geq 50$.
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, ekkor $a + b + c \leq 49$, de ekkor c lehető legnagyobb értéke 15, mert ha $c \geq 16$, akkor $b \geq 17$, $a \geq 18$ és $a + b + c \geq 51$ lenne.
Ekkor viszont d lehető legnagyobb értéke 14, tehát

$$d + e + f + g \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50.$$

Mivel a számok összege 100, ezért

$$a + b + c \geq 50.$$

3. Legyen az 5 egymást követő szám, amit elveszünk $a-2, a-1, a, a+1, a+2$.
Az eredeti 101 szám összege $51 \cdot 101$, a megmaradt 96 szám összege $51 \cdot 96$, tehát $51 \cdot 5 = 255$-tel kevesebb.
Az elvett számok összege, tehát

$$a-2+a-1+a+a+1+a+2 = \\ = 5a = 255,$$

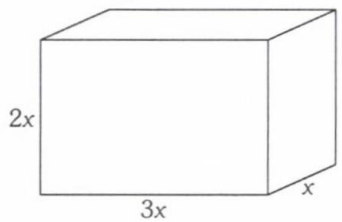
tehát

$$a = 51.$$

A következő öt egymást követő számot vehetjük csak el:

$$49, 50, 51, 52, 53.$$

4. A téglatest élei legyenek x, $2x$, $3x$ cm.



A téglatest felszíne:

$$2(2x^2 + 3x^2 + 6x^2) = 22x^2 = 352 \text{ cm}^2.$$

Ebből $x^2 = 16$, tehát $x = 4$ cm.
A téglatest élei tehát 4 cm, 8 cm és 12 cm, a térfogata pedig: $4 \cdot 8 \cdot 12 = 384 \text{ cm}^3$.

Hetedik osztály

1. Négy egymást követő páratlan egész szám szorzata 9-re végződik. Milyen számjegy áll a szorzatban a tízesek helyén?

2. Egy háromszög egyik szöge háromszorosa a háromszög egy másik szögének. Mutassuk meg, hogy a háromszög egy egyenessel két egyenlő szárú háromszögre bontható!

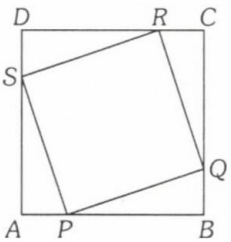
3. Figyeld meg a következő két egyenlőséget:

$$11 - 2 = 3^2,$$
$$1111 - 22 = 33^2.$$

Fogalmazd meg az általánosítást, és bizonyítsd be, hogy igaz!

4. Az A és B városok távolsága 130 km. Három embernek kell A-ból B-be eljutni úgy, hogy rendelkezésükre áll egy kétszemélyes robogó, amelynek sebessége 50 km/óra, és tudjuk, hogy bármelyik gyalogos sebessége 5 km/óra. Hogyan szervezzék meg az utazást, hogy 6,2 óra alatt mindhárman B-be érjenek?

5. Az $ABCD$ négyzet oldalain a P, Q, R, S pontok negyedelik a megfelelő oldalakat. Hányad része a $PQRS$ négyzet területe az $ABCD$ négyzet területének?



A 7. osztály feladatainak megoldása

1. Mivel a négy egymást követő páratlan szám szorzata 9-re végződik, nem lehet köztük 5-re végződő szám, tehát a végződések csak 7, 9, 1 és 3 lehetnek.
Ezek alapján az egyes számok

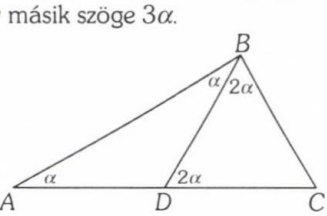
$$10a - 3, 10a - 1, 10a + 1, 10a + 3$$

alakúak. A szorzatuk:

$$(10a-3)(10a-1)(10a+1)(10a+3) = \\ = (100a^2 - 9)(100a^2 - 1) = \\ = 10000a^4 - 1000a^2 + 9 = \\ = 1000(10a^4 - a^2) + 9.$$

Mivel az összeg első tagja osztható 1000-rel, a tízesek helyén álló számjegy 0.

2. A feltétel szerint a háromszög egyik szöge α, egy másik szöge 3α.



A BD egyenes α szöget zár be BA-val, ezért az ABD háromszög egyenlő szárú. Mivel a CDB szög az ABD külső szöge, $CDB\sphericalangle = 2\alpha$ és $CBD\sphericalangle = 2\alpha$, tehát a CDB háromszög is egyenlő szárú.

3. Az általánosítás így fogalmazható meg:

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n} = \underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2,$$

ahol $2n$ és n a számjegyek számát jelenti, $n > 0$ egész szám.

Mivel

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} = \frac{10^{2n}-1}{9} \text{ és } \underbrace{22\ldots2}_{n} = 2\frac{10^{n}-1}{9},$$

a különbség így írható:

$$\frac{10^{2n}-1}{9} - 2\frac{10^{n}-1}{9} = \frac{10^{2n}-2\cdot 10^{n}+1}{9} =$$

$$= \left(\frac{10^{n}-1}{3}\right)^2 = \underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2.$$

4. Először ketten felülnek a robogóra, elindulnak B felé, és a harmadik gyalog indul neki az útnak. A-tól 110 km-re, tehát B-től 20 km-re a robogó utasa gyalog folytatja az útját, a robogó pedig a vezetővel visszafordul a másik gyalogosért.

A 110 km-t a robogó 2,2 óra alatt tette meg, a még hátralevő 20 km-t a gyalogos 4 óra alatt teszi meg, tehát 6,2 óra alatt B-be ér.

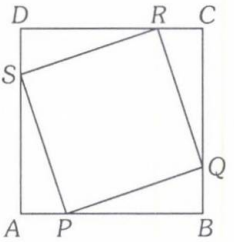
A 2,2 óra alatt az A-ból induló gyalogos 11 km-t tett meg, tehát ekkor 99 km-re van a felé induló robogótól. Mivel 55 km/óra sebességgel közelednek egymáshoz, 1,8 óra múlva találkoznak. Ez alatt a gyalogos még 9 km-t tesz meg, tehát A-tól 20 km-re találkoznak, ez a gyalogos is felül a robogóra, és a 110 km-re levő B-be 2,2 óra alatt beérnek, éppen akkorra, amikor a másik gyalogos is B-be ér. Tehát 6,2 óra alatt mindhárman B-be érnek.

5. Jelöljük a négyzet oldalának hosszát a-val.

Ekkor $AP = \frac{a}{4}$, $AS = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$, tehát az APS derékszögű háromszög területe $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{3}{4}a = \frac{3}{32}a^2$.

Az APS, BQP, QCR és RDS háromszögek egybevágóak, ezért területük egyenlő, így együttes területük $4\cdot\frac{3}{32}a^2 = \frac{3}{8}a^2$.

Az $ABCD$ négyzet területe a^2, tehát a $PQRS$ négyzet területe $a^2 - \frac{3}{8}a^2 = \frac{5}{8}a^2$, tehát az $ABCD$ négyzet területének $\frac{5}{8}$ része.

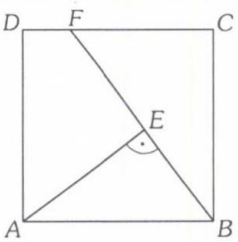


Nyolcadik osztály

1. Egy könyvgyűjtési akcióban a 8. osztályosok közül 16-an hoztak könyvet, és összesen 113-at gyűjtöttek. Közülük néhányan 13-13 darab könyvet hoztak, mások 5-5 darabot, végül a többiek fejenként 4-4-et hoztak. Hányan voltak, akik 13-at, hányan, akik 5-öt, és hányan, akik 4 könyvet hoztak?

2. Adott 20 különböző pozitív egész szám, amelyek nem nagyobbak 70-nél. Bizonyítsuk be, hogy a számok páronként vett különbségei között van négy egyenlő!

3. Egy 5 egység oldalú négyzetbe az ábrán látható módon derékszögű háromszöget rajzoltunk. Tudjuk, hogy $AE = 4$, $BE = 3$ egység. Milyen hosszú az EF szakasz?



4. Pozitív egész számok halmazát két részhalmazra bontottuk. Bizonyítsuk be, hogy legalább az egyik részhalmazban van 3 olyan szám, amelyekre igaz, hogy a három szám közül kettőnek a számtani közepe a harmadik!

5. Mutassuk meg, hogy bármely háromszöget fel lehet bontani 4, 5 és 6 egyenlő szárú háromszögre!

A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Jelölje x, y és z azoknak a 8. osztályosoknak a számát, akik 13, 5 és 4 könyvet hoztak. A feltétel szerint

$$x + y + z = 16,$$
$$13x + 5y + 4z = 113.$$

Vonjuk ki az első egyenlet megfelelő oldalainak 4-szeresét a második egyenlet megfelelő oldalaiból:

Mivel $49 - y$ osztható 9-cel, és $y < 14$, csak $y = 4$ és $x = 5$ jöhet szóba. Az $y = 13$ értékhez $x = 4$ tartozik, és így $x + y > 16$, tehát nem jó.

Az egyetlen lehetséges megoldás: $y = 4$, $x = 5$, $z = 7$, ez jó is, mert $13 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = 113$.

2. Legyenek az adott számok csökkenő sorrendben

$$a_{20} > a_{19} > a_{18} > \ldots > a_2 > a_1.$$

Megmutatjuk, hogy az $a_{20} - a_{19}$, $a_{19} - a_{18}$, ..., $a_2 - a_1$ különbségek között van négy egyenlő.

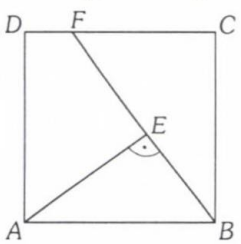
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a felírt 19 különbség között legfeljebb 3 egyenlő van. Így legfeljebb háromszor fordul elő az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és legalább egyszer a 7.

Tehát

$$a_{20} - a_{19} + a_{19} - a_{18} + \ldots + a_2 - a_1 = a_{20} - a_1 \geq$$
$$\geq 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70,$$
$$a_{20} \geq 70 + a_1 \geq 71,$$

ami lehetetlen. Az állítás tehát igaz.

3. Az ABE és BFC derékszögű háromszögek hasonlók, mert megfelelő szögeik egyenlők.



Így a két háromszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $FB : BC = AB : AE$, ezért

$$FB = \frac{AB}{AE} \cdot BC = \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Így $EF = BF - BE = 6{,}25 - 3 = 3{,}25$.

4. Elég lesz az 5, 7 és 9 számok helyét figyelni. Legyen A az egyik részhalmaz, $\mathbb{N} \setminus A = B$ a másik.

Ha $5, 7, 9 \in A$ vagy $5, 7, 9 \in B$, akkor igaz az állítás, hiszen 5 és 9 számtani közepe 7.

Ha 5, 7, 9 nincsenek azonos részhalmazban, akkor A és B közül az egyikben kettő van a három közül. Legyen ez például A (az A és B szerepe teljesen szimmetrikus), és az 5, 7, 9 közül az a két szám, ami A-ban van a és b.

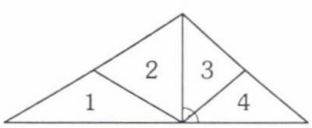
Ha a és b mellett $\frac{a+b}{2} \in A$ is igaz, akkor igaz az állítás.

Ha $\frac{a+b}{2} \notin A$, ekkor $\frac{a+b}{2} \in B$. A $2a - b$ és $2b - a$ pozitív egész számok.

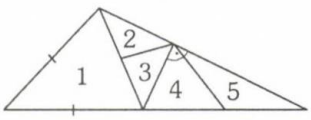
Ha valamelyik A-ban van, például $2a - b \in A$, akkor $\frac{2a-b+b}{2} = a \in A$ miatt igaz az állítás.

Ha $2a - b$ és $2b - a$ mindkettő B-ben van, akkor $\frac{2a-b+2b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \in B$, és így is teljesül az állítás.

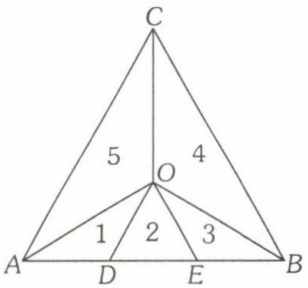
5. Egy tetszőleges háromszögben húzzuk meg az egyik olyan magasságot, amely a háromszög belsejében halad. Ezzel a háromszöget két derékszögű háromszögre bontottuk. Ezután mindegyik derékszögű háromszöget az átfogója felezőpontját összekötve a derékszögű csúccsal, két egyenlő szárú háromszögre bontjuk.



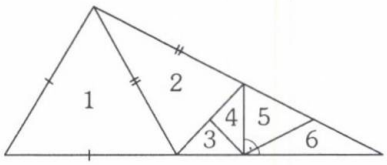
Ha a háromszögnek van két különböző oldala, akkor a kisebbiket a nagyobbikra mérve a közös csúcsból egy egyenlő szárú háromszöget vágunk le, a megmaradt háromszöget 4 egyenlő szárú háromszögre bonthatjuk. Így 5 egyenlő szárú háromszöget kapunk.



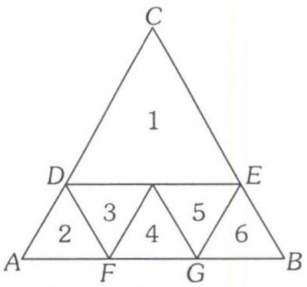
Az egyenlő oldalú háromszöget az ábrán látható módon bontjuk 5 egyenlő szárú háromszögre, 0 a háromszög szimmetriaközéppontja, D és E harmadolópontok.



Ha a háromszögnek van két különböző oldala, akkor az előző esethez hasonlóan két egyenlő szárú háromszöget vágunk le belőle, és a megmaradt háromszöget négy egyenlő szárú háromszögre bontjuk. Így 6 egyenlő szárú háromszöget kapunk.



Az egyenlő oldalú háromszöget például az ábrán látható módon bonthatjuk 6 egyenlő szárú háromszögre. D és E, F és G harmadolópontok, H a DE szakasz felezőpontja.



A tanárképző főiskolások 2005. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

1. Igazoljuk, hogy

$$8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ!$$

2. Egy háromszög belsejében lévő P ponton áthaladó, és a háromszög oldalaival párhuzamos három egyenes a háromszöget három kisebb háromszögre és három paralelogrammára osztja. A paralelogrammák területe rendre 4, 6 és 10 területegység. Mekkora a nagy háromszög területe?

3. Hányféleképpen lehet kiválasztani a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek közül hármat úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak?

4. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 3$ egész szám, akkor

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$$

osztható 65793-mal!

5. Az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy

$PAB\sphericalangle = 30^\circ$, $PAC\sphericalangle = 10^\circ$, $PCA\sphericalangle = 20^\circ$,

továbbá $ABC\sphericalangle = 40^\circ$. Mekkora a $BPC\sphericalangle$?

6. Mutassuk meg, hogy a $(\sqrt{37}+6)^{1000}$ szám tizedestört alakjában a tizedesvessző után következő első 1000 számjegy 9.

7. Egy játékkockával addig dobunk, de legfeljebb százszor, amíg néhány egymás utáni dobás összege 6 vagy 7 lesz.
Melyiknek nagyobb a valószínűsége?

Pályázati felhívás

Rátz Tanár Úr Életműdíj – 2005
biológia-, matematika-, fizika- és kémiatanárok elismerésére

Az Ericsson Magyarország Kft., a Graphisoft Rt. és a Richter Gedeon Rt. közös díjat alapított tanároknak, melyet a Fasori Gimnázium legendás hírű matematikatanáráról „RÁTZ TANÁR ÚR ÉLETMŰDÍJ"-nak nevezett el. E díj gondozására létrejött az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért, mely jelöltenként az 1.000.000 forinttal járó elismerést minden évben két-két biológia-, matematika-, fizika- és kémiatanárnak ítéli oda.

A díjra a közoktatás *5–12. évfolyamain biológiát és/vagy matematikát és/vagy fizikát és/vagy kémiát tanító* (vagy egykor tanító) aktív tanárok terjeszthetők fel írásban szakmai és társadalmi szervezetek, az ajánlott tanár tevékenységét jól ismerő kollektívák által.

A felterjesztés feltétele, hogy a jelölt a közoktatás területén – nem szervezői munkakörben – dolgozó, az 5–12. évfolyamokon több éven át kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző/végzett olyan tanár legyen,

- aki a fenti tantárgyak közül legalább az egyiket több éven át eredményesen tanította, tanítványai a középiskolában és/vagy a felsőfokú intézményekben sikerrel állják/állták meg a helyüket,
- akinek tanítványai az országos hazai és/vagy nemzetközi versenyeken a fenti tantárgyak valamelyikében az elsők között szerepeltek vagy többször a döntőbe jutottak,
- aki tevékenységében gondot fordít a hátrányos helyzetű, tehetséges diákok felfedezésére, tudásuk gyarapítására,
- aki jelentős szerepet vállal a fenti négy tantárgy valamelyikéhez kapcsolódó országos, regionális vagy iskolai szakmai programok (pl. versenyek, továbbképzések, tanácskozások) megszervezésében, a program tartalmának felépítésében és kivitelezésében (pl. előadások tartása, szakanyagok készítése, friss információ továbbítása),
- aki rendszeresen továbbképzi magát, tájékozott az adott tudomány területén elért eredményekről, a tantárgy tanításával kapcsolatos aktualitásokról, és tapasztalatait megosztja kollégáival,
- aki szakmai lapokban publikál, könyveket, tankönyveket, tanítási segédleteket írt vagy ír,
- aki a szaktárgyi felkészítés mellett hivatásának tekinti tanítványai nevelését, személyiségük fejlesztését, problémáik megoldásához segítséget nyújt,
- akinek személyisége, szakértelme, egész életvitele példamutató.

A díjakat a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjbizottságai, a Magyar Kémikusok Egyesülete, valamint az MTA Biológiai Tudományok Osztálya ajánlásai alapján a három cég által felkért Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma – melynek elnöke Dr. Kroó Norbert, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára – ítéli oda az adott év kitüntetettjeinek.

A négy tudományos társaság a beérkezett ajánlásokat a fenti feltételek szellemében értékeli, s ennek alapján teszi meg javaslatait a díjazottakra 2005. október 7-ig. Ezen javaslatok alapján hozza meg döntését az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma 2005. október 24-ig. A díj átadására 2005 novemberében kerül sor.

Az írásos felterjesztéseket legkésőbb 2005. szeptember 12-ig kérjük eljuttatni – illetékesség szerint – *matematikatanárok esetén a Bolyai János Matematikai Társulat*hoz, *fizikatanárok esetén az Eötvös Loránd Fizikai Társulat*hoz (mindkettő címe 1027 Budapest, Fő utca 68.), illetve *biológia- és kémiatanárok esetében az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért* (Richter Gedeon Rt., 1475 Budapest 10, Pf. 27.) címére. A borítékra jól láthatóan írják rá, hogy „Rátz Tanár Úr Életműdíj". Az elmúlt év felterjesztéseit – ha azt továbbra is fenntartják a javaslattevők – ismételten írásban kell megerősíteni!

Az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma

Dr. Korányi Erzsébet

Új könyv a kétszintű érettségihez

A Corvina Kiadó felfigyelt az aktuális problémára: a közép- és az emelt szintű érettségi új erőfeszítésre készteti a középiskolai tanárokat, akik, bár ismerik az évek óta formálódó terveket, most találkoznak először a valóságban azzal, ami eddig csak beszédtéma volt. Ezért elindított egy sorozatot, amely több tantárgyból is az érettségire való jobb felkészülést kívánja elősegíteni. Örömmel vettem a felkérést, hogy írjam meg e sorozat matematikára vonatkozó részét. Könyvem elkészült, 2004 novemberében megjelent, most már az érdeklődő kollégák és a vizsgára készülő diákok rendelkezésére áll.

A sorozat címe: ÚJ ÉRETTSÉGI

A könyv címe: MATEMATIKA TÉTELEK
terjedelme: 280 oldal,
méretei: 167 mm, 237 mm,
ára: 1990 Ft.

E cikkem célja az érdeklődés felkeltése, tartalmi és formai ismertetés, egyes alkalmazási lehetőségek bemutatása.

A könyv célja

A diákok számára a sok év alatt folyamatosan megszerzett tudás mindaddig csak lazán összefüggő ismeretek halmaza, amíg nem követi egységes szemléletű áttekintés, alapos rendszerezés. Erre a középiskola utolsó évében az iskolák nagy gondot fordítanak, de a korlátozott óraszám nem teszi lehetővé, hogy a teljes fogalomrendszert újra megfogalmazzák, a fogalmak tulajdonságait, ezek kapcsolatrendszerét kellőképpen rögzítsék, s emellett a feladatmegoldásra (ez biztosíthatja a vizsga eredményességét) annyi idő és munka jusson, amennyi szükséges. Sajnálatos tapasztalat, hogy sok diák úgy akar „rengeteg" feladatot megoldani, hogy előtte nem emészti meg azt a tananyagot, amelyre e megoldásoknak támaszkodniuk kellene.

Van e gondok megoldására egy jó lehetőség (s ennek érdekében, erre alkalmas módon készült a most bemutatott mű): *ha a tanulók egy könyv segítségével önállóan átismétlik a soron lévő téma fogalmait, tételeit, akkor a tanórán erre a tudásra építve lehet elmélyedni a probléma- és feladatmegoldásban.* A 12. osztályban már elvárható mindez a korábban tanult ismeretekre vonatkozóan.

A feladatmegoldások során gyakran felmerül, mit is értünk pontosan egy matematikai fogalmon, mit kell róla tudni. Ilyen esetben is eredményesen használható könyvünk: fellapozható a tartalomjegyzéke vagy a tárgymutatója, s azonnal meg lehet találni a választ a kérdésekre.

A célközönség

Érettségire (ami egyúttal felvételi vizsgát is jelenthet) a jelenlegi végzős diákok és olyan fiatalok is készülnek, akik korábbi években fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Mindkét csoport számára jelentősen segíti a felkészülést e könyv, akár tanórai, tanfolyami tanári közreműködéssel, akár egyéni munkával dolgozzák fel a benne megadott anyagot.

Tanár kollégáim számára pedig igen nagy segítséget jelent, ha a tanítványaik kezében van egy ilyen részletes, a vizsgára kijelölt anyagot didaktikusan feldolgozó könyv, mert erre támaszkodva a tanórai munkában elsősorban a gyakorlásra, problémamegoldásra fordíthatják figyelmüket. Ha ez nem valósítható meg, akkor kedves Kollégáim az ismétlés szervezésében, tervezésében is eredményesen használhatják.

A feldolgozott anyag

Pontosan ragaszkodtam a RÉSZLETES ÉRETTSÉGI VIZSGAKÖVETELMÉNYhez. A középszintű és az emelt szintű érettségi témái folyamatos elrendezésben, de jól elkülönülve jelennek meg. Így lehetővé válik, hogy „akinek nem fontos", az is betekintést nyerhessen mélyebb, érdekesebb problémakörökbe. Utat mutatunk az alkalmazások irányába is, ezt szolgálják a kidolgozott feladatok, amelyeket bekeretezéssel különítünk el az elméleti anyagtól.

A könyv szerkezete

1. Felépítés

TARTALOM	5–7. oldal
ELŐSZÓ	9. oldal
FEJEZETEK	
Halmazok, kombinatorika	11–36. oldal
Valós számok	37–69. oldal
Logika, algebra	70–102. oldal
Függvények	103–142. oldal
Az analízis elemei	143–163. oldal
A tér geometriája	164–183. oldal
Síkbeli és térbeli alakzatok	184–225. oldal
Vektorok, trigonometria, koordinátageometria	226–252. oldal
Statisztika, valószínűségszámítás	253–275. oldal
TÁRGYMUTATÓ	276–279. oldal.

2. A fejezetek felépítése

Mindegyik fejezet *alfejezetekből*, ezek legtöbbje *szakaszokból* áll, sok szakasz pedig *pontokra* bomlik.

Például a *Függvények* című fejezet alfejezetei:

Valós-valós függvények (5 szakasz);
Sorozatok (6 szakasz);
Gazdasági számítások (4 szakasz).

3. A szakaszok felépítése

Mindegyik szakasz megadja a témához tartozó (és előírt) fogalmak pontos definícióját, tulajdonságait (az ide vágó tételeket), és ahol szükséges, ez utóbbiak bizonyítását. Egyszerű példákat mutatunk minden egyes részletre, és kidolgozott feladatokkal hívjuk fel a figyelmet a legfontosabb alkalmazásokra.

Példaként bemutatjuk két szakasz felépítését:

A) A *Síkbeli és térbeli alakzatok* fejezet *Térbeli alakzatok* alfejezetének *Síklapú testek* című szakasza (213–215. oldal) ilyen szerkezetű:

- **A hasáb** (fogalmak, ábrák, speciális esetek).
- **Kidolgozott feladat:** Mekkora az ábrán megadott hatoldalú oszlop leghosszabb átlója? (Az alapélek 3 cm, az oldalélek 6 cm hosszúak).
- **A gúla** (fogalmak, ábrák, speciális esetek, példa).
- **A csonkagúla** (fogalmak, ábrák).
- **Kidolgozott feladat:** Egy szabályos gúla alaplapja 16 cm-es oldalú négyzet, oldalélei 25 cm-esek. A gúlát elmetsszük az alaplapjától 3 cm távolságban haladó, vele párhuzamos síkkal. Mekkorák a keletkező csonkagúla fedőélei?
- **Konvex testek, konkáv testek** (fogalmak, ábrák). **[Az emelt szintű érettségihez.]**
- **Szabályos testek** (fogalmak, ábrák, tulajdonságok). **[Az emelt szintű érettségihez.]**

B) A *Sorozatok* fejezet *Gazdasági számítások* alfejezetének *Járadékszámítás, hiteltörlesztés* című szakasza (139–142. oldal) ilyen szerkezetű:

- **Járadékszámítás** (a járadék fogalma, fajtái, példák).
- **Kidolgozott feladat:** Kovács úrnak havi 30 000 forint járadékot folyósítanak.
  a) Mennyi járadékot kap 10, 20, 30 év alatt?
  b) Hány év alatt kap összesen 12 millió forintot?
- **Kidolgozott feladat [az emelt szintű érettségihez.]:** Kovács úr havi járadékot kap, amely az első évben havonta 30 000 forint, majd évente 6%-kal nő.
  a) Mennyi járadékot kap 10, 20, 30 év alatt?
  b) Hány év alatt kap összesen 12 millió forintot?
- **Az előző feladat általánosítása** (képlet alkotása, példa megoldása a képlettel). **[Az emelt szintű érettségihez.]**
- **Hitel törlesztése** (gyakori változatok, példa egyenlő részletekben visszafizetendő hitellel kapcsolatban). **[Az emelt szintű érettségihez.]**
- **Kidolgozott feladat [az emelt szintű érettségihez]:** Hitelre vásároltunk egy 2,4 millió forintos gépkocsit, 8 év alatt minden év végén egyenlő részletekben törlesztünk, a kereskedő évi 13%-os kamattal számol. Mennyi az évenként fizetendő összeg? (Megoldás okoskodással.)
- **Az előző feladat általánosítása** (képlet levezetése) **[az emelt szintű érettségihez].**
- **Kidolgozott feladat [az emelt szintű érettségihez]:** Lakásépítésre kölcsönt vettünk fel, 25 évre, 5%-os kamatláb mellett. A kölcsön összege 8 millió forint. Három év türelmi idő után 22 éven keresztül egyenlő részletekben kell törlesztenünk. Mennyit kell évente fizetnünk? (Megoldás a képlettel.)

Néhány jellegzetesség

1. A könyvet igyekeztem egyszerű magyar nyelven, jól tagolva megírni.

2. Tömören, mégis érthetően fogalmazva sorolom fel az érettségi anyagkijelölésben szereplő fogalmakat, tételeket, amelyek így könnyen felidézhetők, alkalmazásra kész ismeretrendszert alkotnak. A mellékelt példák roppant egyszerűek, a fogalmak elmélyítését szolgálják.

3. Sok esetben egymásra épülő problémák, feladatok elemzésével fokozatosan, kis lépésekben jutunk előre az ismétlés folyamatában. Erre mutatok két példát:

A) A *Vektorok, trigonometria, koordinátageometria* fejezet *Koordinátageometria* alfejezetében *Az egyenes egyenlete* szakaszban 3 egymásra épülő kidolgozott feladat szerepel:

- Írjuk fel az *ABCD* téglalap oldalegyeneseinek az iránytangensét, ha *A*(0; 5) és *B*(2; 8)! (244. oldal.)
- Írjuk fel az *ABCD* téglalap három oldalegyenesének az egyenletét, ha *A*(0; 5) és *B*(2; 8)! (246. oldal.)
- Ismerjük a 246. oldalon lévő feladatban szereplő *ABCD* téglalap *A* és *B* csúcsát, az *AB*, *AD*, *BC* egyenesek egyenletét. A *D* csúcs az *x* tengelyen van.
  - *a)* Adjuk meg a *D* csúcs koordinátáit!
  - *b)* Írjuk fel a *CD* egyenes egyenletét!
  - *c)* Határozzuk meg a *C*-t mint a *BC* és a *CD* egyenes metszéspontját!
  - *d)* Határozzuk meg a *C*-t vektorok felhasználásával! (247. oldal.)

Mindegyik feladat előtt felelevenítjük a megfelelő fogalmakat, tételeket, módszereket, azután térünk rá magára a feladatra.

B) A *Statisztika, valószínűség-számítás* fejezet *A valószínűség-számítás elemei* alfejezet *Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül* című szakaszában először

- egy kockadobási problémán kísérünk végig egy problémát: *Egy szabályos dobókockát 10-szer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk 6-ost?* A számítás után megfigyeljük, hogyan fejezhető ki az eredményünk a 6-os dobásának *p* valószínűségével. Ezután
- megfogalmazzuk a visszatevéses mintavétel egy, az előzővel azonos matematikai tartalmú gyakorlati problémáját (*Hat látszatra egyforma gép közül egy selejtes* stb.), majd
- általános definíciót adunk, bemutatjuk az általános képletet, ezt két példán alkalmazzuk.
- Ezután következik *A binomiális eloszlás* című pont, majd
- egy kidolgozott feladat: *Egy szabályos dobókockát 10-szer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan k-szor dobunk 6-ost? Végezzük el a számítást a k összes lehetséges értékére!*

E feladat megoldása tartalmazza a szóban forgó binomiális eloszlás grafikonját is.

A (269–271. oldalakon lévő) feldolgozás tehát olyan, mintha egy csigalépcsőn haladnánk egyre feljebb, fokozatosan bővítve a témát, és magasabb szinten visszatérve a kiindulópont közelébe.

4. Amennyire egy ilyen típusú könyv megengedi, előtérbe igyekeztem helyezni a gondolkodási képességek fejlesztését, a szemléletformálást, a problémákra adott előzetes becslések és a valóság egyezését, illetve eltérését. Jellemző példa (az emelt szintű érettségire készülők számára) a hipergeometriai eloszlás problémája, amikor (mint a binomiális eloszlás esetében) egy kiválasztási probléma vizsgálatából kiindulva furcsálljuk, hogy *ha 10 fiú és 5 lány közül kiválasztunk 6 gyereket, akkor csak 0,42 annak a valószínűsége, hogy közöttük 4 fiú és 2 lány lesz* (vagyis azonos a teljes halmaz és a minta esetében a fiú-lány arány), amikor azonban végül a teljes eloszlást megfigyelhetjük, kiderül, hogy mégis ez a 0,42 a legnagyobb előforduló valószínűség, vagyis az a legvalószínűbb, hogy e két halmazban egyenlők az arányok. – Egy ilyen gondolatsor, ami a könyv két oldalának (272–273.) feldolgozása után az olvasó sajátjává válik, többet ad egy diáknak, mint számos, konkrét probléma nélküli intelligens eszmefuttatás.

Zárszó

Mint minden szerző, több könyvet tele tudnék írni egy könyvem magyarázgatásával, de azt természetesen senki sem olvasná el. Az észszerű terjedelemre gondolva így nem szóltam például arról sem, hogyan dolgoztam fel könyvemben kedvenc területemet, a differenciál- és integrálszámítás elemeit (21 oldal jutott rá!), mit tartottam fontosnak a számelmélet, a logika, a síkmértan stb. fejezetek anyagának elemzése során. Várom, hogy ezt kedves Kollégáim, Önök tárják fel és hasznosítsák tanítványaik javára. Örömömre szolgálna, ha észrevételeikkel felkeresnének a *kobok@ludens.elte.hu* e-mail címen.

Marczis György

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap 2005 – Gyula

"Minden, ami emberi, akár jó, akár rossz, előbb-utóbb véget ér. Kivéve a matematikát."
Erdős Pál

Nagy sikerrel zárult 121 versenyző részvételével a Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozatának március 12-én Gyulán az Erkel Ferenc Gimnáziumban rendezett *Hajnal Imre Matematika Tesztversenye és Módszertani Napja*. Immár nyolcadszor gyűltek össze a fürdővárosi gimnáziumban a megye (versenyen kívül a szegedi Ságvári Endre Gyakorlógimnázium) legjobb középiskolás matematikusai és az érdeklődő pedagógusok.

A közel kétszáz vendéget az ünnepélyes megnyitón *dr. Kereskényi Miklós*, az Erkel Ferenc Gimnázium igazgatója, valamint *Sipos János*, az Oktatási Minisztérium közoktatásért felelős helyettes államtitkára üdvözölte, majd *Marczis György*, a szervezésért felelős szaktanácsadó bemutatta a zsűrit, melynek elnöke *dr. Németh József* docens, tagjai *dr. Szakács Attila* docens és *Kosztolányi József* adjunktus voltak. Ezután ismertette a versennyel kapcsolatos tudnivalókat.

Miközben a diákok a 120 percesre tervezett 30 feladatos tesztlapot kitöltötték, addig az érdeklődő vendégek meghallgathatták *Árki Tamás* középiskolai tanár *„Dinamikus geometria – új módszerek a geometria oktatásában"*, *dr. Németh József* egyetemi docens *„Miért jó matematikát tanítani ?"*, valamint *Sipos János* államtitkár *„Ismeret és/vagy képesség?"* című előadásait.

A beadási határidő lejárta után elkezdődött az értékelőlapok kijavítása.

Ebéd után a feladatsort összeállító *Kosztolányi József* ismertette az általa összeállított feladatlap helyes megoldását. Utána Árki Tamás a diákoknak is tartott a geometria újszerű megközelítéséről egy előre be nem tervezett számítógépes előadást.

A programokkal egyidőben a *Konsept-H Kft.*, a *Mozaik Kiadó*, a *Nemzeti Tankönyvkiadó*, a *Műszaki Könyvkiadó*, a *Polygon Kiadó* és a *Texas Instruments* a kiadványaiból és termékeiből árusítással egybekötött bemutatót tartott.

Kora délután már eredményt is hirdettek. *Dr. Németh József*, a zsűri elnöke értékelte a versenyzők munkáját, és kiemelte, hogy a legjobbak a nehéz feladatok ellenére is igen magas pontszámot értek el. Ezután Sipos János helyettes államtitkárral együtt átadták a győztesnek és a helyezetteknek, valamint felkészítő tanáraiknak a támogatók által felajánlott értékes jutalmakat. Ebben segített nekik *Ollár Mariann*, a tavalyi verseny győztese, valamint *Gyöngyösi András*, aki az Euro-Profil Rt. által felajánlott fődíjat, egy Texas Instruments grafikus számológépet nyújtott át a verseny győztesének. Az egész napos rendezvény a zsűri elnökének záró gondolataival és Marczis György szaktanácsadó jövő évre szóló meghívó szavaival ért véget.

A verseny végeredménye: 1. *Tirják Márk* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Szabó Zsófia*), 2. *Gyurkó Gábor* (Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Szakközépiskola, tanára *Gelovics Éva*), 3. *Hegedűs Dániel* (Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Szakközépiskola, tanára *Schédl Ilona*), 4. *Sznyida Róbert* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Pocsai Zoltánné*), 5. *Szabolcsi Petra* (Táncsics Mihály Gimnázium, tanára *Cselőtei Katalin*), 6. *Szakál Péter* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Szabó Zsófia*). A *dr. Perjési Klára*, Gyula város polgármestere által felajánlott *„A legjobb eredményt elért gyulai versenyző és felkészítő tanára"* különdíjat *Kotroczó Ágnes* (Erkel Ferenc Gimnázium) és *Tóth István* kapta. Az Erkel Ferenc Gimnázium különdíját *Szekretár Péter*

és felkészítő tanára, *Mihály Mária* érdemelte ki. A legjobb versenyen kívül induló *Kirsch Norbert*, a szegedi Ságvári Endre Gyakorlógimnázium diákja lett (tanárai: *Konfárné Nagy Klára* és *Tarcsay Tamás*).

A verseny teljes anyaga megtalálható a *www.sulinet.hu* és a *www.erkel.hu* weboldalakon.

A Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata, az Erkel Ferenc Gimnázium és a Békés Megyei Humán Fejlesztési és Információs Központ köszöni mindazoknak a segítségét, akik a Hajnal Imre Matematika Tesztversenyt és Módszertani Napot támogatták.

Fő támogatóink voltak: *Békés Megyei Humán Fejlesztési és Információs Központ; BJMT Békés Megyei Tagozata; Dürer Nyomda és Kiadó Kft.; Erkel Ferenc Gimnázium Alapítvány; Gyula város Polgármesteri Hivatala; Konsept-H Könyvkiadó és Kereskedelmi Kft.; Mozaik Kiadó; Műszaki Könyvkiadó; Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.; Oktatási Minisztérium; Polygon Kiadó; Texas Instruments; Typotex Elektronikus Kiadó Kft.*

Támogattak: *Alexandra Könyvesbolt – Gyula; Bacardi Café – Gyula – Székely László; Bacsa Magdolna; Békés Megyei Hírlap; Busa László; Corvin Hotel – Gyula – Bozó András; Csepi Ker. Kft. – Csepregi Lajos; Erkel Ferenc Zeneiskola – Gyula; Faragó Ágota, Fazekas Gyula; Fuji Foto Centrum – Puy László; Göndöcs Benedek Szakképző Iskola; Győri Keksz Kft. – Pásztor Zoltán; Gyulai Hírlap; Gyulai Várszínház; Kaczkó András; Lupsán István; Nádházi István; Schneider Nyomda – Schneider János; SHANNON IRODA – Simon Béla – Nyíregyháza; Szabados Kristóf, Szabó és Társa Kft. – Gyula – Szabó Árpád; Szekeres Károly; Tüzép Panzió; Zugevő Pizzéria – Annus Géza.*

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2005. augusztus 31.

Feladatok (275–279.)

275. Melyek azok az a, b, c egész számok, amelyekre bármely valós x esetén teljesül, hogy

$$(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)?$$

276. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsából induló élek páronként merőlegesek egymásra. Jelölje R az ABC háromszög köré írt kör sugarát, és m a tetraéder D csúcsból induló magasságának hosszát. Mutassuk meg, hogy $R \geq \sqrt{2} \cdot m$.

Varga István, Békéscsaba

277. Egy konvex négyszög α, β, γ és δ belső szögeire teljesül, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a négyszög vagy trapéz, vagy húrnégyszög.

278. Határozzuk meg az $\dfrac{x^2+y^2}{y}$ kifejezés minimumát, ha $7x^2+3xy+3y^2=1$.

279. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_0=1$, $a_1=a$ (a pozitív egész), és minden $n \geq 1$ esetén $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2$. Igazoljuk, hogy minden $k \geq 0$ esetén létezik olyan l pozitív egész szám, hogy $a_k \cdot a_{k+1}=a_l$.

Feladatmegoldások (260–264. feladatok)

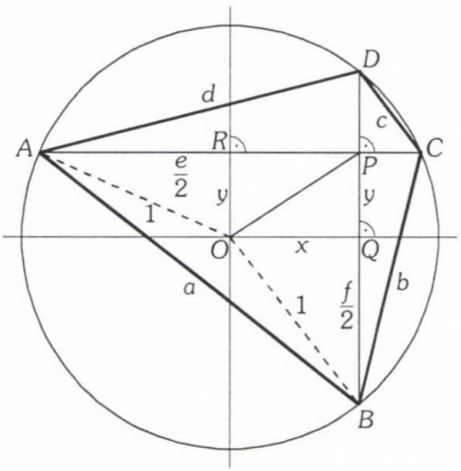
260. Az egységnyi sugarú körbe írt $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlói merőlegesek egymásra. Számítsuk ki a négyszög oldalainak négyzetösszegét.

I. megoldás: Az *1. ábra* jelöléseit használva

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\left(\frac{e}{2}+x\right)^2+\left(\frac{f}{2}+y\right)^2+$$

$$+\left(\frac{e}{2}-x\right)^2+\left(\frac{f}{2}+y\right)^2+\left(\frac{e}{2}-x\right)^2+\left(\frac{f}{2}-y\right)^2+$$

$$+\left(\frac{e}{2}+x\right)^2+\left(\frac{f}{2}-y\right)^2=e^2+f^2+4(x^2+y^2).$$



1. ábra

Igaz viszont, hogy

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2+y^2=1$$

és

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2+x^2=1,$$

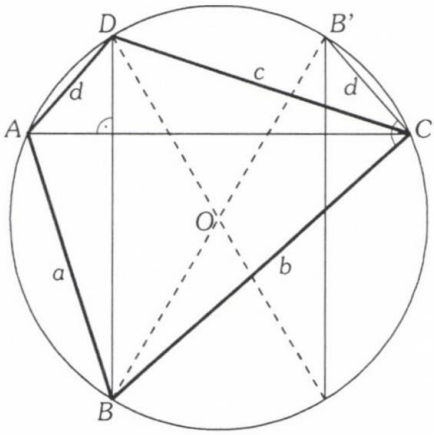
amit figyelembe véve

$$\frac{e^2}{4}+\frac{f^2}{4}+x^2+y^2=2.$$

Ebből következik, hogy $a^2+b^2+c^2+d^2=8$. A kapott eredmény akkor is érvényes, ha $xy=0$.

Több megoldás alapján

II. megoldás: Tükrözzük a DB átlót O-ra (*2. ábra*). Ekkor $B'C=d$.



2. ábra

A $BB'C$ derékszögű háromszögben $d^2+b^2=4$. Az AC átló O-ra vonatkozó tükrözésével az előzőhöz hasonlóan adódik, hogy $a^2+c^2=4$. Kaptuk $a^2+b^2+c^2+d^2=8$.

Kamarás Lajos, Pécs
Varga Éva, Kecskemét

A megoldók száma: 15.

261. A p paraméter mely valós értékeire van az

$$(x^2-2px-4(p^2+1))\cdot(x^2-4x-2p(p^2+1))=0$$

egyenletnek pontosan három, páronként különböző valós gyöke?

Megoldás: Két lehetőség van arra, hogy az egyenletnek pontosan három különböző valós gyöke legyen: 1. A két másodfokú polinom gyökei valósak, és van közös gyökük; 2. Az egyik másodfokú polinomnak két különböző valós gyöke van, a másiknak egy darab, kétszeres valós gyöke van.

1. Tegyük fel, hogy a két polinomnak van közös valós gyöke, jelölje ezt x_0. Ekkor tehát

$$x_0^2-2px_0-4(p^2+1)=0$$

és

$$x_0^2-4x_0-2p(p^2+1)=0.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt

$$(2p-4)x_0=(2p-4)(p^2+1).$$

$p = 2$ esetén a két egyenlet azonossá válik, és így a feladat feltétele nem teljesülhet. Ha $p \neq 2$, akkor $x_0 = p^2 + 1$ a közös gyök. Ezt bármelyik egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(p^2 + 1)(p^2 - 2p - 3) = 0,$$

ahonnan $p = -1$ vagy $p = 3$.
Ha $p = -1$, akkor az eredeti egyenletnek a 2 háromszoros multiplicitású gyöke, így ez nem felel meg a feladat feltételeinek.
Ha $p = 3$, akkor az eredeti egyenlet gyökei: –6; –4; 10 (a közös gyök).

2. Vizsgáljuk meg a két polinom diszkriminánsát. Az eredeti egyenlet bal oldala első tényezőjének diszkriminánsa $D_1 = 4 \cdot (5p^2 + 4) > 0$, így csak a második tényezőnek lehet kétszeres gyöke. Ekkor $D^2 = 16 + 8p(p^2 + 1) = 0$, ahonnan $(p + 1)(p^2 - p + 2) = 0$. Ez csak $p = -1$ esetén teljesül, erről pedig már láttuk, hogy nem felel meg a feltételeknek.
Kaptuk, hogy az eredeti egyenletnek pontosan akkor lesz három, páronként különböző valós gyöke, ha $p = 3$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

262. Mutassuk meg, hogy minden olyan pozitív egész számnak van csupa 1-es számjegyből álló többszöröse, amely az 1, 3, 7 vagy 9 számjegyek valamelyikére végződik.

Megoldás: Legyen n olyan pozitív egész szám, amely az 1, 3, 7 vagy 9 számjegyek valamelyikére végződik, és tekintsük a következő $n + 1$ darab „csupaegy" számot:

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ darab}}.$$

A skatulyaelv miatt van ezek között a számok között két olyan, amelyek ugyanazt a maradékot adják n-nel osztva. Ezen két „csupaegy" szám pozitív különbsége osztható n-nel. Ez a szám egy „csupaegy" szám és egy 10 hatvány szorzata. Mivel az 1, 3, 7 vagy 9 végződésű számok relatív prímek a 10-hez, ezért a tekintett különbség „csupaegy" tényezője osztható n-nel. Ezzel az állítást beláttuk.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A feladat (illetve annál valamivel több is) megtalálható Skljarszkij–Csencov–Jaglom: *Válogatott feladatok az elemi matematika köréből – 1. Aritmetika és algebra* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.) című könyv 94. feladataként (29., 158–159. oldal).

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 11.

263. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n pozitív egész) valós számokra $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \ldots + \sqrt{1 + a_n x} = n$$

egyenletnek van legalább egy 0-tól különböző valós gyöke.

Megoldás: A feladat állítása hamis. Legyen ugyanis $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Ekkor az egyenlet

$$n\sqrt{1 + x} = n,$$

aminek csak az $x = 0$ a megoldása.
A megoldók száma: 9.

Megjegyzések:

1. *Rakonczai György (Budapest)* a következő módosítást javasolta:
Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n 1-nél nagyobb pozitív egész) valós számokra $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{1 + a_1 x_1} + \sqrt{1 + a_2 x_2} + \ldots + \sqrt{1 + a_n x_n} = n$$

egyenletnek van legalább egy olyan valós megoldása, ahol valamelyik x_i 0-tól különböző.

Megoldás: Ha valamely $a_j = 0$, akkor legyen $x_j = 1$, a többi x_i pedig 0. Ha egyik a_i sem 0, akkor az $x_1 = \dfrac{n^2 - 1}{a_1}$, és $i > 1$ esetén $x_i = \dfrac{-1}{a_i}$ csupa nem 0 megoldása az egyenletnek.

2. Ördög bújt a rovatvezetőbe, mikor ezt a feladatot kitűzte, de nem szerkesztési hibáról van szó. Gyerekekkel csináltuk ezt a példát annak illusztrálására, hogy kritikusan kell kezelni a különböző helyeken kitűzött feladatok állításait, mindig meg kell vizsgálni, hogy nem találunk-e ellenpéldát. Ennek a feladatnak a kapcsán azt is

kértem a tanulóktól, hogy fogalmazzanak meg ezzel az egyenlettel kapcsolatban olyan állítást, ami viszont már igaz. Titkon egy ilyen módosítás vágya tűzette ki velem ezt a feladatot ezeken a hasábokon.
Íme egy már igaz állítás a feladattal kapcsolatban, aminek bizonyítását az ebben a számban kitűzött feladatok megoldásával együtt várom a Tisztelt Kollégáktól.

263v. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n pozitív egész) valós számokra $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{1+a_1x} + \sqrt{1+a_2x} + \ldots + \sqrt{1+a_nx} = n$$

egyenletnek legfeljebb egy 0-tól különböző valós gyöke van.

264. Az $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$) konvex sokszög A_1 csúcsába 1-et, a többi csúcsba 0-t írunk. A csúcsokba írt számok a következő szabály szerint változtathatók: ha az A_i csúcsban 1 áll, és az A_{i-1}, A_i, A_{i+1} csúcsokban álló számokat rendre a, b, c jelöli, akkor ezek a számok egyidejűleg rendre az $1-a$, $1-b$, $1-c$ számokra cserélhetők. Elérhető-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mindegyik csúcsban 0 álljon, ha *a*) $n = 2004$; *b*) $n = 2005$?

Megoldás: A feladat szövegében ugyan nincs benne, de természetesen $A_0 = A_n$ és $A_{n+1} = A_1$.

a) Belátjuk, hogy ha $n = 3k$, akkor a kívánt elrendezés nem érhető el véges sok lépésben.
Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy véges sok lépésben elérhető a „csupa 0" állapot. Jelölje a_i az A_i csúccsal mint középponttal végrehajtott változtatások számát ($i = 1, 2, \ldots, n$). Mivel minden egyes változtatás az 1-esek számát páratlan számmal (1-gyel vagy 3-mal) változtatja meg, és kezdetben egy darab 1-es volt, a végén pedig nincs 1-es, ezért az

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

összeg páratlan.
Csoportosítsuk S tagjait a következőképpen:

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \ldots + (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}).$$

$a_1 + a_2 + a_3$ az A_2-beli 0-1 cserék száma, és mivel A_2-ben kezdetben is és a végén is 0 áll, ezért ez az összeg páros. Ugyanez igaz az S minden egyes három tagból álló egységére is, ami ellentmond annak, hogy S páratlan. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

b) Belátjuk, hogy ha $n = 3k + 1$, akkor véges sok lépésben elérhető a „csupa 0" állapot.
Hajtsuk végre rendre az A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-2} pontokkal mint középpontokkal a transzformációt. A következő állapotot kapjuk:

$$\begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}. \quad (1)$$

Ezután k darab, 1-esekből álló hármas csoportra egymás után végrehajtva a transzformációt a „csupa 0" helyzetet kapjuk.

Megjegyzés: Ha $n = 3k + 2$, akkor az (1) helyzetben A_{n-1} középponttal végrehajtva a transzformációt, kapjuk, hogy

$$\begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}. \quad (2)$$

(2)-ből egymást követő, csak 1-eseket tartalmazó hármas csoportokat változtatva elérhető, hogy nem marad 1-es, azaz $n = 3k + 2$ esetén is megvalósítható a kívánt állapot.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (260. 3 mód, 261., 262.); Csorba Ferenc, Győr (260–263.); Dályay Pál Péter, Szeged (260–264.); Fitos László, Esztergom (260.); Kamarás Lajos, Pécs (260–264.); Kiss Zoltán, Pécs (260–264.); Márkus Erika, Kecskemét (260., 264.); Rakonczai György, Budapest (260–263.); Szoldatics József, Kapuvár (260–264.); Tóth Sándor, Sárospatak (260–264.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (260., 261., 262. 2 mód, 263.); Varga Éva, Kecskemét (260. 2 mód); Varga István, Békéscsaba (260.); Zachar Zoltán, Tatabánya (260–264.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (260–262.).

NAT 2003
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-től kezdődően az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadó által készített kerettantervrendszert az OM akkreditálta, és nyomtatásban megjelent a 17/2004. (V. 20.) rendelet mellékleteként az Oktatási Közlöny 2004/68. számának 593-1488. oldalán. A kerettanterv letölthető az OM honlapjáról, valamint a www.mozaik.info.hu címről.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Egy új középről

(Bencze Mihály)

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában

(Mészáros József)

A 2004/2005. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

(Dr. Kántor Sándorné)

A 2005. évi Beke Manó emlékdíjasok

XIII. ÉVFOLYAM 2005 4

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1450 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Egy új középről
Bencze Mihály
tanár, Brassó

A 2005. évi Beke Manó emlékdíjasok

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában
Mészáros József
tanár, Jóka

A XXXIV. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről
Urbán János
tanár, Budapest

A 2004/2005. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről
Dr. Kántor Sándorné
adjunktus, Debrecen

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Bencze Mihály

Egy új középről

Cikkünkben egy új középarányost vezetünk be, ami élesíti az ismert számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, és bemutatjuk néhány érdekes alkalmazását.

Jelölje $A(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ a számtani közepet ($a_1, a_2, ..., a_n > 0$), $G(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ a mértani közepet, és legyen $B(a_1, a_2, ..., a_n) = \ln\left(1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(e^{a_k} - 1)}\right)$ egy új középarányos, amit először 1982-ben Bencze Mihály vezetett be [1].

Tétel: Ha $a_k > 0$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor $G(a_1, ..., a_n) \le B(a_1, ..., a_n) \le A(a_1, ..., a_n)$.

Bizonyítás: Ha $x_k > 0$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor alkalmazva a számtani- és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, felírhatjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j + ... + \sum_{1\le i_1<i_2<i_{n-1}\le n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{n-1}} + \prod_{k=1}^{n} x_k \ge$$

$$\ge 1 + \binom{n}{1}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^2 + ... + \binom{n}{n-1}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^n,$$

és így

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k) \ge \ln\left(1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right).$$

Ebből az $1 + x_k = e^{a_k}$ ($k = 1, 2, ..., n$) jelöléssel az $A(a_1, a_2, ..., a_n) \ge B(a_1, a_2, ..., a_n)$ egyenlőtlenség adódik.

Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol $f(x) = \ln(\ln(1 + e^x))$.

Mivel $f''(x) = \frac{e^x(\ln(1+e^x) - e^x)}{(1+e^x)^2(\ln(1+e^x))^2} \le 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért f konkáv, így alkalmazva a Jensen-féle egyenlőtlenséget felírhatjuk, hogy $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$, ahol $x_k > 0$ ($k = 1, 2, ..., n$), vagyis

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\ln(1+x_k)} \le \ln\left(1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right).$$

Ha $1 + x_k = e^{a_k}$ ($k = 1, 2, ..., n$), akkor a $G(a_1, a_2, ..., a_n) \le B(a_1, a_2, ..., a_n)$ egyenlőtlenség adódik. Ezzel a tételt igazoltuk [1].

1. alkalmazás: Bármely háromszögben érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\sqrt[3]{4sRr} \le B(a, b, c) \le \frac{2s}{3}$,

2. $\sqrt[3]{sr^2} \le B(s-a, s-b, s-c) \le \frac{s}{3}$,

3. $\sqrt[3]{\frac{2s^2r^2}{R}} \le B(h_a, h_b, h_c) \le \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$,

4. $\sqrt[3]{s^2r} \le B(r_a, r_b, r_c) \le \frac{4R + r}{3}$,

5. $\sqrt[3]{\frac{s}{r}} \le B\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}, \operatorname{ctg}\frac{B}{2}, \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) \le \frac{s}{3r}$,

6. $\sqrt[3]{\frac{r}{s}} \le B\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \le \frac{4R+r}{3s}$,

7. $\sqrt[3]{\frac{r^2}{16R^2}} \le B\left(\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}\right) \le \frac{2R-r}{6R}$,

8. $\sqrt[3]{\frac{s^2}{16R^2}} \le B\left(\cos^2\frac{A}{2}, \cos^2\frac{B}{2}, \cos^2\frac{C}{2}\right) \le \frac{4R+r}{6R}$,

ahol A, B, C az ABC háromszög szögeit; a, b, c az oldalait; h_a, h_b, h_c a magasságait; r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarait; r a háromszögbe írt kör sugarát; R a háromszög köré írt kör sugarát és s a félkerületét jelöli.

Ezek bizonyos ismert egyenlőtlenségeknek egy újabb élesítését eredményezik [2].

2. alkalmazás: Jelölje T az ABC ($a \ge b \ge c$) derékszögű háromszög területét, akkor

$$\sqrt[3]{4a^2T^2} \le B(a^2, b^2, c^2) \le \frac{2a^2}{3} \quad [2].$$

3. alkalmazás: Jelölje V az $ABCDA'B'C'D'$ a, b, c élű és d testátlójú téglatest térfogatát, akkor

1. $\sqrt[3]{V^2} \le B(a^2, b^2, c^2) \le \frac{d^2}{3}$,

2. $\sqrt[3]{dV} \le B(a^2, b^2, c^2, d^2) \le \frac{d^2}{2}$ [2].

4. alkalmazás: Az $ABCD$ tetraéderben

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}} \le B\left(\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}, \frac{1}{h_d}\right) \le \frac{1}{4r}$,

2. $\frac{1}{\sqrt[4]{r_a r_b r_c r_d}} \le B\left(\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}, \frac{1}{r_d}\right) \le \frac{1}{2r}$,

ahol h_a, h_b, h_c, h_d a tetraéder magasságai; r_a, r_b, r_c, r_d a tetraéderhez hozzáírt gömbök sugarai; r a tetraéderbe írt gömb sugara. Ezek is ismert egyenlőtlenségeknek egy új élesítését adják [2].

5. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\sqrt[n]{n!} \le B(1, 2, \ldots, n) \le \frac{n+1}{2}$,

2. $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2 \le B(1^2, 2^2, \ldots, n^2) \le \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$,

3. $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^3 \le B(1^3, 2^3, \ldots, n^3) \le \frac{n(n+1)^2}{4}$,

4. $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^4 \le B(1^4, 2^4, \ldots, n^4) \le$
$\le \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$,

5. $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^5 \le B(1^5, 2^5, \ldots, n^5) \le$
$\le \frac{n(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

Lásd [2].

6. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} F_k} \le B(F_1, F_2, \ldots, F_n) \le \frac{F_{n+2}-1}{n}$,

2. $\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} F_k}\right)^2 \le B(F_1^2, F_2^2, \ldots, F_n^2) \le \frac{F_n F_{n+1}}{n}$,

3. $\sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} L_{2k+1}} \le B(L_1, L_3, \ldots, L_{2n+1}) \le$
$\le \frac{L_{2n+2}-2}{n+1}$,

4. $\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} L_k}\right)^2 \le B(L_1^2, L_2^2, \ldots, L_n^2) \le \frac{L_n L_{n+1}-2}{n}$,

ahol F_k és L_k a k-adik Fibonacci-féle, illetve Lucas-féle számokat jelölik [2].

7. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \le B\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right) \le \frac{2^n}{n+1}$,

2. $\left(\sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}\right)^2 \le B\left(\binom{n}{0}^2, \binom{n}{1}^2, \ldots, \binom{n}{n}^2\right) \le$

$\le \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$

Lásd [2].

8. alkalmazás: Ha $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, akkor

$$x \le B(1, x, x^2, \ldots, x^n) \le \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)} \quad [2].$$

9. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\sqrt[n]{n!\prod_{k=1}^{n}k!} \le B(1\cdot 1!, 2\cdot 2!, \ldots, n\cdot n!) \le \dfrac{(n+1)!-1}{n},$

2. $\sqrt[n]{((n+1)!)^2\prod_{k=1}^{n}k!} \le$

$\le B(1!2^2, 2!3^2, \ldots, n!(n+1)^2) \le \dfrac{(n+1)!-2}{n},$

3. $\sqrt[n]{(n!)^2\prod_{k=1}^{n}(k+1)!} \le$

$\le B(2!1^2, 3!2^2, \ldots, (n+1)!n^2) \le$

$\le \dfrac{(n+2)!(n-1)+2}{n},$

4. $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k^2+1)k!} \le B(1!2, 2!5, \ldots, n!(n^2+1)) \le$

$\le (n+1)!$

Lásd [2].

10. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n!)^2}} \le B\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}, \dfrac{1}{2\cdot 3}, \ldots, \dfrac{1}{n(n+1)}\right) \le$

$\le \dfrac{1}{n+1},$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{2}{(n+2)(n+1)^2(n!)^3}} \le$

$\le B\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, \ldots, \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right) \le$

$\le \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)},$

3. $\sqrt[n]{\dfrac{12}{(n+3)(n+2)^2(n+1)^3(n!)^4}} \le$

$\le B\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \ldots, \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \le$

$\le \dfrac{n^2+6n+11}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$

Lásd [2].

11. alkalmazás: Érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

1. $\dfrac{1}{2}n^{\frac{1}{n^{n-1}}} \le B\left(\sin\dfrac{\pi}{n}, \sin\dfrac{2\pi}{n}, \ldots, \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) \le$

$\le \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$ ha $n \ge 2,$

2. $\dfrac{1}{2}n^{\frac{1}{2(n-1)}} \le$

$\le B\left(\sin\dfrac{\pi}{2n}, \sin\dfrac{2\pi}{2n}, \ldots, \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right) \le$

$\le \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4n}-1\right).$

Lásd [2].

12. alkalmazás: Ha $a, b > 0$, akkor

$$\sqrt{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)} \le \ln 2 \le \frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)+\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{2}.$$

Lásd [3].

Bizonyítás: A tételben legyenek $n = 2$ és $a_1 = \dfrac{a}{b}$, $a_2 = \dfrac{b}{a}$.

Irodalom

[1] Bencze Mihály: Egyenlőtlenségek (kézirat) 1982.

[2] Octogon mathematical Magazine (1993–2005) gyűjteménye.

[3] Sándor József: Matematikai jegyzet. Matlap, Kolozsvár, 6/2005, pp. 212–213.

A 2005. évi Beke Manó emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat 2005. évi Beke Manó-Emlékdíj Bizottsága körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta:

A 2005. évi díj első fokozatában Pálfalvi Józsefné részesül.

Pálfalvi Józsefné 1963-ban végzett az ELTE matematika–fizika szakán. 1963–65 között Budapesten az Irinyi János Gimnáziumban, 1965–75 között a Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban tanított. 1975-től a Budapesti Tanárképző Főiskolán adjunktusként, majd docensként dolgozott. 1989-től a Matematika Tanszék vezetője. Ezen időszakban is 15 éven át tanított a Veres Pálné Gimnáziumban.

Egyik előkészítője a Varga Tamás által fémjelzett tanítási kísérlet középiskolai bevezetésének. Ennek nyomán született a Bartal–Pálfalvi gimnáziumi munkatankönyv sorozat s négy tankönyvi útmutató. E tankönyvek már a 70-es évek végén elsősorban a tanulói aktivitást, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztését tűzték ki célul. Igen jól használható a „Barátkozzunk a számokkal" c. szakköri füzete.

Pálfalvi Józsefné 30 év óta igen sokat tesz annak érdekében, hogy a főiskoláról jól felkészült, helyes matematikai szemlélettel és megfelelő módszertani kultúrával rendelkező általános iskolai tanárok kerüljenek ki. Rendszeresen tartott tanítóknak és általános iskolai tanároknak továbbképző előadásokat a számfogalom és a függvényfogalom fejlesztéséről és egyéb fontos módszertani kérdésekről Budapesten és vidéken. Számos cikke is megjelent.

Kiemelkedő érdeme az általa 15 éve minden év novemberében megszervezett Varga Tamás Napok, a Varga Tamás Akadémia. Kezdeményezésére több hasznosítható pályázati írás született tanítóktól, tanároktól közvetlenül a tanítási gyakorlatból. 1978-ban a Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesült.

A Beke Manó-díj második fokozatában Gyengéné Beé Andrea részesül.

Gyengéné Beé Andrea matematika–fizika szakos tanári diplomáját kitüntetéssel szerezte meg 1985-ben. Azóta a budapesti Eötvös Gimnázium tanára. Egyik közreműködője volt a Pósa Lajos vezette matematika tanítási módszertani kísérletnek. Az ELTE TTK vezetőtanári munkát, az Arany Dániel versenybizottsági tagságot kollégái és az érintett diákok, hallgatók megelégedésére végzi több éve. Iskolája pedagógiai koncepciójának és matematika szaktárgyi programjának kidolgozója. A kerettantervi munkálatok egyik legaktívabb tagja.

Szakmailag kiemelkedően felkészült, a tanulói felfedezésre építő matematikatanítási módszer iránt elkötelezett tanár. Alapvető célja a tárgy megszerettetése és szépségének minél több diák számára láthatóvá tétele. Ezek segítségével formálja tanítványainak gondolkodását. Felelősséggel és eredményesen vezeti az iskola matematika munkaközösségét. Sokat tesz azért, hogy az új tantervi fejezetek tanítását a munkaközösség felkészülten kezdje el, a szaktárgyi követelmények egységesek és reálisak legyenek. Több osztályt vezetett osztályfőnökként. Ezt a feladatot is empátiával, igényesen, a tanulók személyiségének komplex fejlesztéséért érzett nagy felelősséggel végezte.

A hatosztályos gimnáziumi osztályok számára 7. és 8. osztályos tankönyvet is írt. Szaktárgyi, módszertani felkészültsége, a matematikai nevelés országos feladataiban való sikeres közreműködése, iskolafejlesztő tevékenysége kiemelkedő.

A Beke Manó-díj második fokozatában Lippai Gergelyné részesül.

Lippai Gergelyné (Orbán Edit) 1974-ben kapott tanítói diplomát a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. Tiszanagyfalun, Nyíregyháza-Sóstóhegyen tanított, majd 1982-ben nyert kinevezést mai iskolájába, a Móricz Zsigmond Általános Iskolába, ahol tanítói munkája mellett az úttörőcsapat helyettes vezetőjeként is tevé-

kenykedett, több évig volt munkaközösség-vezető, 1998-tól igazgatóhelyettes.

Céltudatos személyiség. Állásfoglalásaiban megbízható. Reális gondolkodású. Kitartása, szorgalma, lendülete példa a nevelőtestület előtt. Kollégáival való kapcsolatát nyugodtság, türelem és szakmaiság jellemzi. Elsősorban a matematika és a készségtárgyak oktatásában, az osztályfőnöki nevelőmunkában mélyült el. Munkájára az alaposság, a nagyfokú igényesség és a lelkiismeretesség jellemző. Tanítási óráit módszertani gazdagság, életszerűség, jó hangulat és a szemléletesség teszik utolérhetetlenné. Tanítványaival kapcsolata példaértékű, gyermekközpontú, közösségfejlesztő. Számtalan tanítási órán kívüli programot, túrát, táborozást szervez osztályközösségének. Szívesen segíti munkatársait, bemutató tanításokat vállal. Számítógépes matematikatanítása egyedülálló, melyhez több oktatóprogramot is készített.

Alsós gyerekek és tanítóik számára több kiadványt is készített. Iskolája 1990-ben kezdte meg az emelt szintű matematika-informatika oktatást. Eddig 3 egyedi tantervet készített e területen. A Pedagógiai programok tervezőmunkáiból is kivette részét: a személyiségfejlesztés-közösségfejlesztés területének egyik alkotója. Iskolája több mint egy évtizede évente megrendezi a 4-500 résztvevős Dienes Pál megyei matematikaversenyt. Ezt a versenyt ő indította el, és a mai napig oroszlánrészt vállal a szervezésben.

Az, hogy iskolája az utóbbi években a város egyik legjobb hírű, legeredményesebb iskolája lett, az ő munkájának is köszönhető. Ezt miniszteri, városi kitüntetések is bizonyítják.

A Beke Manó-díj második fokozatában Pintér Klára részesül.

Pintér Klára Szegeden, a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumának fizika tagozatán érettségizett. 1975-től a JATE programtervező matematikus hallgatója, 1980-ban szerzett diplomát. 1980 és 1986 között a Szegedi Orvostudományi Egyetem Számítóközpontjában dolgozott. 1986-tól tanít a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén, 1996-tól adjunktusként. 1988-ban középiskolai matematika–számítástechnika szakos tanári oklevelet szerzett. 1994 és 1996 között óraadó tanárként tanított a JATE Ságvári Endre Gyakorló Általános Iskolájában.

Publikációs tevékenysége igen jelentős. Számos cikke jelent meg különböző magyarországi és külföldi szakdidaktikai folyóiratokban. Ezen cikkek témája zömében fő érdeklődési területeivel, a tehetséggondozással és a probléma-megoldási képességek fejlesztésével kapcsolatos. Tankönyvek és feladatgyűjtemények szerzője, illetve társszerzője, ezek közül is kiemelhetjük a méltán közkedvelt Matematikai problémakalauzt és a Sokszínű matematika tankönyvsorozatot.

Pintér Klára az általános matematikai tehetséggondozás országosan elismert alakja. Számos tehetséggondozó táborban tartott foglalkozásokat (Vác, Kőszeg), ezek mellet hosszú évek óta minden augusztus végén tehetséggondozó tábort szervez Csongrád megye tehetséges általános iskolásainak. Rendszeresen kérik fel előadónak konferenciákon, tanártovábbképzéseken. Előadásai, tehetséggondozó foglalkozásai érdekesek, újszerűek és igen magas szakmai színvonalúak. Nagyon sok helyre hívják, és ő zömében elfogadja ezeket a meghívásokat. A főiskolán felkarolja a tehetséges, érdeklődő tanár szakos hallgatókat, mindig van TDK dolgozatot író hallgatója. Egyik hallgatója 2005-ben az OTDK tantárgy-pedagógiai szekciójában II. díjat kapott dolgozatáért. Főiskolai órái, előadásai, gyakorlatai, speciálkollégiumai igen népszerűek, a hallgatók szeretik.

Tagja a Bolyai János Matematikai Társulat Választmányának és Oktatási Bizottságának, valamint a Polygon folyóirat szerkesztőbizottságának. Pintér Klára mind emberi, mind szakmai szempontból kiváló kolléga.

A Beke Manó-díj második fokozatában Poronyi Gábor részesül.

Poronyi Gábor 1964-ben végzett a Pécsi Tanárképző Főiskola matematika–fizika–műszaki ismeretek és gyakorlatok szakán. Munkáját a nagynyárádi iskolában kezdte. Munka mellett végezte el az ELTE fizikatanári, majd a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem számítástechnikatanár szakot. 1979-ben az ELTE-n matematikából egyetemi doktori címet szerzett. 1968 óta tanít középiskolában, szaktárgyai közül főleg matematikát. Dolgozott a Baranya me-

gyei pedagógiai intézetben módszertani munkatársként, majd 1991-ben igazgató lett az Árpád Fejedelem Gimnázium és Általános Iskolában.

Szervezőmunkájának köszönhetik a baranyai gyerekek, hogy elsők között kapcsolódhattak be a Zrínyi Ilona versenybe 1992-ben. Középiskolai kollégákkal, barátokkal a matematika versenyek gondozására alapítványt hozott létre. Fő szervezője a Kárpát-medencei Gordiusz versenynek. A szervezés mellett feladatokat is készít, az általa kitűzött feladatok könyvekben is megjelentek. Az évek során ezeken kívül is publikált, több módszertani cikke jelent meg.

Tanítványait a tantárgy szeretetére, magas szintű művelésére nevelte. Sok fiatal kollégája tőle tanulta meg a gyerekekkel való mértéktartóan gondoskodó, türelmes, következetes bánásmódot. Kiemelt feladatának tekinti igazgatóként is a tehetséges tanulók fejlesztését, segítését, gondozását. Rendszeresen vezet szakkört, ahová tanítványai szívesen járnak. Munkatársaitól elvárja az igényes, következetes pedagógiai, szaktárgyi munkát, ahhoz igyekszik megteremteni az optimális feltételeket.

A hosszú időn át végzett kiváló és eredményes, tantárgyát népszerűsítő oktató-nevelő munkáját ismeri el a Beke Manó-Emlékdíj.

A Beke Manó-díj második fokozatában Szoldatics József részesül.

Szoldatics József már középiskolai diákként kiemelkedett társai közül szorgalmával, tudásával, tehetségével. A megyei csúcsszakkör leglelkesebb látogatója. 1986-ban matematika–fizika szakos, 1996-ban számítástechnika szakos tanári diplomát szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Jelenleg a kapuvári Felsőbüki Nagy Pál Gimnázium tanára, dolgozik a Veszprémi Egyetem Műszaki Informatikai Kar Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolájában. 1992-ben a Győr-Moson-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet középiskolai matematika szakértőnek kérte fel.

Aki csak ismeri, egy kiváló, rutinos pedagógust tisztelhet benne. Aktivitása páratlan, teherbírása példaértékű. A napi tanítási munka mellett iskolájának számítógépes rendszerét gondozza, a matematika munkaközösség vezetője. Bármely tehetséggondozó foglalkozáson ott van, hozza tanítványait, magas színvonalon tanít, előadásokat tart többek között a Rátz László Vándorgyűlésen is, cikke jelent meg a Matematika Tanításában. Tudományos kutatómunkát folytat Tuza Zsolt professzor irányítása mellett. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola, valamint a saját iskolája honlapját is szerkeszti. Szerénysége példamutató. OKTV bizottsági tagként hozzájárult a verseny színvonalas munkájához.

Személyében olyan tanár kap kitüntetést, aki eddig is sokat tett a matematikáért, és másoknak is lendületet adott, hogy végezzék ezt a nemes feladatot sok-sok diák örömére!

A Beke Manó-díj második fokozatában Udvarhelyi Csaba részesül.

Udvarhelyi Csaba matematika–fizika–számítástechnika szakos tanár jelenleg Szegeden, a Bálint Sándor Általános Iskolában tanít. Általános iskolai, matematikafizika szakos tanári oklevelét 1983-ban a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte. 1988-ban a Kossuth Lajos Tudományegyetemen általános iskolai számítástechnika szakos tanári diplomát is szerzett. Pedagógus pályáját a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolában kezdte. Tanóráit az alaposan megszervezett tanulói tevékenykedtetés és a jól tervezett fogalomalkotás, gyakorlás jellemzi. Sikeresen él a pedagógiai és módszertani szabadság lehetőségeivel. Tanítványait képességeik szerint igyekszik foglalkoztatni, erre ösztönzi kollégáit is. Nagy gondot fordít az önképzésre.

A tehetséges tanulókkal való kiemelt foglalkozás szívügye. 1990-től a szegedi Gutenberg János Általános Iskolában személyére építve indítottak csoportbontásban szervezett matematika tagozatot. Tevékeny részese volt az iskolájában már akkor beindított számítástechnika tantárgyszerű oktatásának. Az eredményesebb munka érdekében megszerezte a számítástechnikai szoftverüzemeltető szakképesítést.

Az 1994/95-ös tanévtől a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszéke külső szakvezető tanárnak kérte fel. Azóta a matematika szakos tanárjelöltek tanítási gyakorlatát is irányította, segítette több éven át. E mellett rend-

szeresen fogad a februári külső gyakorlatra negyedéves hallgatókat. A kezdő tanárok szakmai és beilleszkedési problémáiról módszertani előadásra is felkérték a főiskolán.

Tanítványai rendszeresen részt vesznek a helyi, területi és országos szervezésű matematika-, természettudományos és számítástechnika-versenyeken, ahol rendszeresen elismerésre méltó eredményeket érnek el. Mindig fontos feladatának tekintette a tehetséggondozást, a tehetségekkel való rendszeres foglalkozást. Immár 13 éve végzi nagy odaadással Csongrád megyében a Kis Matematikusok Levelező Versenyének szervezését. A versenyt egy éve Bonifert Domonkos Matematikaversenynek nevezték el, és az Interneten is hozzáférhető a sulinet oldalain. Támogat minden kezdeményezést, ami a matematikát mint tudományt és mint tantárgyat népszerűsíti. Több más verseny szakmai munkájából is alaposan kiveszi a részét.

A tehetséges tanulókkal való törődés a tanéven túl is szívügye. A Csongrád Megyei Matematika- és Fizikatanárok Szegedi Alkotóműhelye által az érdeklődő tanulók számára több éven keresztül szervezett Nemzetközi Matematika–Fizika Tehetséggondozó Szaktábor tartalmas lebonyolításában aktívan részt vett minden évben. A tehetséggondozás mellett mindennapi munkájában nem hanyagolja el a szerényebb képességű tanulók fejlesztését, felzárkóztatását sem. Számukra tanórán kívül is igyekszik biztosítani az esélyegyenlőséget a biztonságos továbbhaladásban.

A Gutenberg János Általános Iskola bezárása után került a Bálint Sándor Általános Iskolába, jelenlegi munkahelyére, ahol matematikát, fizikát és számítástechnikát tanít. Idén újabb diplomát szerzett közoktatásvezető szakon.

Mészáros József

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában

Szlovákiában a matematikai tanulmányi versenyek megnevezése Matematikai Olimpia (MO) néven ismeretes. 1950-ben indították el az akkori Csehszlovákiában, s azóta több változáson ment keresztül. A matematikaversenyek skálája bővült és színesedett, levelezőversenyekből sincs hiány, és a Zrínyi Ilona versenynek is van alteregója. Diákjaink bekapcsolódhatnak a Kenguru versenybe is, néhány háziverseny is meghonosodott már, pl. az Ógyallai Konkoly-Thege Miklós Matematikaverseny, a Révkomáromi Cornides István Matematika–Fizika Emlékverseny. Az egyik legjelentősebb és legrégibb matematikaverseny a Felvidéki Magyar Matematikaverseny, amely a Komáromi Ipari Szakközépiskola háziversenyéből nőtte ki magát, és amelyet most 29. alkalommal Léván bonyolítottak le 22 iskola részvételével.

A verseny színvonalának emelése érdekében a fentebb említett három versenyre magyarországi testvériskolákat is meghívnak. Nem verseny, de feltétlenül meg kell említeni a novemberben zajló Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozót, amely szellemiségével és színvonalával záloga diákjaink jó szereplésének az egyes megmérettetéseken.

A bőség zavarával küszködve inkább a középiskolai MO versenyekről számolnék be, konkrétabban az 54-ről.

Az MO versenyek kategóriákra vannak osztva: C kategória – 1. évfolyam (9. osztály), B kategória – 2. évfolyam (10. osztály) és A kategória – 3. és 4. évfolyam (11. és 12. osztály).

A B és C kategória háromfordulós verseny, az A kategóriának van ezen kívül még országos fordulója is, általában 40 résztvevővel.

A legelső fordulót házi fordulónak nevezik. A tanulók júniusban 6 feladatot kapnak kézhez, melyek kidolgozásával november végéig kell elkészülniük. Ezek általában nehéz feladatok, a tanulók azonban használhatnak szakirodalmat és mindennemű segédeszközt. A hat feladat közül legalább négyet helyesen kell a tanulónak megoldania, hogy a december elején megejtett ún.

iskolai fordulóban, ami zárthelyi, részt vehessen. Itt a tanulónak legalább 56%-os teljesítményt kell elérnie, hogy meghívják őt a kerületi fordulóba, amely a megyeszékhelyeken zajlik.

Az A kategóriának van országos fordulója is, amely az idén Nagymihályban lesz.

Az utóbbi időben egyre több magyar diák kap meghívást erre az országos rendezvényre, és ahol megállják a helyüket.

Az 53. MO országos versenyén pl. nyolc magyar diák vett részt, s a füleki Csodnár Jóska a hattagú válogatott csapatba is bekerült harmadikos létére. A párkányi Mészáros Tamás, (a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium tanulója) egyetlen pontveszteséggel nyerte a nyitrai kerületi versenyt, s tavaly is benne volt a bővebb keretben.

Ismertetném még a feladatokban előforduló példajelöléseket. C–I–4 pl. az első (házi) forduló negyedik feladata kilencedikeseknek. B–S–2 pl. a tizedikesek iskolai fordulójának 2. feladata. Továbbá pl. A–II–1 a 11. és 12. osztályosok kerületi fordulójának első feladata. Az országos döntő hatodik feladatának jele: A–III–6.

Íme az MO 54. évfolyama 2004–2005. tanévi I. fordulójának feladatai.

MO 54. évfolyam
A kategória – előkészítő feladatok

A–I–1: A természetes számok nem üres halmazát kicsinek nevezzük, ha kevesebb eleme van legkisebb eleménél. határozzátok meg az összes olyan M kicsi halmaznak a számát, amely az $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ halmaz részhalmaza, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik: ha x és y egymástól különböző számok beletartoznak M-be, akkor $|x - y|$ is M eleme lesz.

Megoldás: Legyen M a példában említett véges, nem üres halmaza a természetes számoknak, és legyen k számú eleme, amelyeket sorba rendezünk: $x_1 < x_2 < ... < x_k$.

$k = 1$ esetben az $M = \{x_i\}$ triviális megoldás, és ezután tegyük fel, hogy $k > 1$. Ekkor $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$ elemnek is M-be kell tartoznia, és mivel $x_2 - x_1 < x_2$, ezért $x_2 - x_1 = x_1$, s kapjuk, hogy $x_2 = 2x_1$. Hasonlóan érvényes $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ két elem M-ből, amelyek x_3-nál kisebbek, miközben $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, úgyhogy érvényesnek kell lennie: $x_3 - x_2 = x_1$ (és $x_3 - x_1 = x_2$), amelyeket egyberakva azt kapjuk, hogy $x_3 = x_2 + x_1 = = 2x_1 + x_1 = 3x_1$. Ezt a gondolatmenetet továbbfolytatva kapjuk az $x_4 = 4x_1$, ..., $x_k = kx_1$ egyenlőségeket. Ezeket az egyenlőségeket formálisan teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ha érvényes az $x_n = nx_1$ egyenlőség valamilyen n értékre, $1 \le n < k$, akkor $x_{n+1} - x_n$; $x_{n+1} - x_{n-1}$; $x_{n+1} - x_1$ a példa feltétele szerint M-be tartozik, kisebb x_{n+1}-nél, s növekvő sorrendben van felírva, így az $x_{n+1} - x_n = x_1$ eredményre jutunk, ahonnan $x_{n+1} = x_n + x_1 = n \cdot x_1 + x_1 = = (n + 1) \cdot x_1$ a bizonyítás vége. Ha bevezetjük az $x_1 = m$ jelölést, akkor a k elemszámú M halmaz alakja: $M = \{m; 2m; 3m; ...; k \cdot m\}$ (1).

Másik oldalon viszont egyértelmű, hogy az ilyen M halmaznak megvan az elvárt tulajdonsága: legyen k és m bármilyen, a feltételeket kielégítő természetes szám.

Az M halmaz éppen akkor lesz kicsi, ha teljesül a $k < m$ egyenlőtlenség. Egyidejűleg teljesülnie kell még a $k \cdot m \le 100$ egyenlőtlenségnek, és rátérünk a kicsi halmazok számának meghatározására.

A $k < m$ és $k \cdot m \le 100$ egyenlőtlenségekből következnek az $1 \le k \le 9$ és $2 \le m \le 100$ egyenlőtlenségek.

Rögzített k értékre teljesülnie kell a $k + 1 \le m \le \le \frac{100}{k}$ egyenlőtlenségnek. Behelyettesítve az egyes k értékeket a $p(k)$ számuk a következő lesz: $p(1) = 99$; $p(2) = 48$; $p(3) = 30$; $p(4) = 21$; $p(5) = 15$; $p(6) = 10$; $p(7) = 7$; $p(8) = 4$; $p(9) = 2$. A keresett részhalmazszám: $99 + 48 + ... + 4 + 2 = 236$.

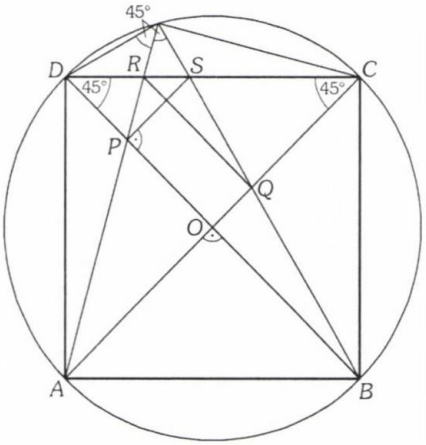
Ha $q(m)$ a (k, m) rendezett számpárnak megfelelő részhalmazszám adott m mellett, akkor rögzített m mellett az $1 \le k \le \min\left\{m - 1, \frac{100}{m}\right\}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

$q(2) = 1$; $q(3) = 2$; $q(4) = 3$; ...; $q(51) = q(52) = = ... = q(100) = 1$.

A keresett részhalmazszám:

$1 + 2 + ... + 8 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 50 = 236$.

A–I–2: Legyen M az $ABCD$ négyzet köré írt kör rövidebbik CD ívének tetszőleges belső pontja. Legyenek P és R az M egyenes metszéspontjai rendre a DB, CD szakaszokkal ill. Q és S a BM egyenesnek az AC, DC szakaszokkal való metszéspontjai. Bizonyítsuk be, hogy PS és QR kölcsönösen merőlegesek egymásra!



Megoldás: Könnyen észrevehető, hogy $|PMS\sphericalangle| = 45° = |PDS\sphericalangle|$, amiből következik, hogy $PSMD$ négyszög húrnégyszög. A húrnégyszög szemközti szögeinek tulajdonsága alapján $|DPS\sphericalangle| = 90°$, azaz $PS \perp BD$-re.
Hasonlóan bizonyítható, hogy $QR \perp AC$-re, s ezzel állításunkat bizonyítottuk.

A–I–4: Az $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ és $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ adott számtani sorozatoknak közös az első tagjuk, és a következő tulajdonsággal rendelkeznek: létezik $k > 1$ index úgy, hogy érvényes:

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad (1)$$

$$x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad (2)$$

$$x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27. \quad (3)$$

Határozzuk meg az összes ilyen k indexet!

Megoldás: A definíció értelmében:

$$x_{k+1} = a + k \cdot dx,$$
$$y_{k+1} = a + k \cdot dy$$

(3) alapján:

$$k \cdot (dx - dy) \cdot (2a + k(dx + dy)) = 27,$$

amiből:

$$2a + k \cdot (dx + dy) = \frac{27}{k \cdot (dx - dy)}. \quad (4)$$

Így három egyenletet kapunk:

$$2a + (k-1) \cdot (dx + dy) = \frac{53}{(k-1) \cdot (dx - dy)} \quad (5)$$

és

$$2a + (k-2) \cdot (dx + dy) = \frac{78}{(k-2) \cdot (dx - dy)}. \quad (6)$$

(4) – (5):

$$dx + dy = \frac{-26k - 27}{k(k-1)(dx - dy)},$$

ill. (5) – (6):

$$dx + dy = \frac{-25k - 28}{(k-1)(k-2)(dx - dy)}.$$

Nyilván $k \neq 1$; 2 és $dx \neq dy$, ezért a baloldalak egyenlőségéből a $k^2 - 53k - 54 = 0$ egyenlőséghez jutunk, és:

$$(k - 54)(k + 1) = 0 \Leftrightarrow k = 54.$$

A–I–3: Legyen k tetszőleges természetes szám. Vizsgáljuk az olyan (a, b) rendezett egész számpárt, amelyre az $x^2 - 2ax + b = 0$ és $y^2 + 2ay + b = 0$ másodfokú egyenletnek vannak valós (nem feltétlenül különböző) x_1; x_2, ill. y_1; y_2 gyökei olyan sorrendben, hogy érvényes az $x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 = 4k$ egyenlőség.

a) Adott k értékre határozzátok meg a lehető legnagyobb b értéket az összes $(a; b)$ értékpár esetén!

b) $k = 2004$ esetén határozzátok meg az $(a; b)$ párok számát!

c) Adott k értékre számítsátok az összes ilyen $(a; b)$ esetén a b számok összegét, miközben minden b számot annyiszor számolunk, ahány $(a; b)$ párban előfordul!

Megoldás: Felírható, hogy

$$x_1; x_2 = \left\{a + \sqrt{a^2 - b}; a - \sqrt{a^2 - b}\right\},$$

ill.

$$y_1; y_2 = \left\{-a - \sqrt{a^2 - b}; -a + \sqrt{a^2 - b}\right\},$$

miközben $a^2 - b \geq 0$.
Összesen 4 lehetőségünk adódik, amelyből 3 különböző megoldást kapunk: $a\sqrt{a^2 - b} = k$, ill. $-a\sqrt{a^2 - b} = k$, ill. $4k = 0$.
A $4k = 0 \Leftrightarrow k = 0$, nálunk a 0 nem természetes szám. Ez $a^2 = b$ esetben állna fenn.

Mivel $a\sqrt{a^2-b}=k$ és $-a\sqrt{a^2-b}=k$ érvényesek, ezért $(\pm a; b)$ megfelelőek lesznek, elég tehát az $a\sqrt{a^2-b}=k$ egyenletet vizsgálni.

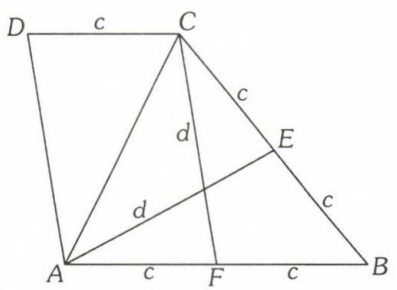
a) Mivel a $k=0$ esetet megtárgyaltuk, ezért $a^2-b=1$ esetén kapunk b-re maximumot, tehát $b_{max}=a^2-1$.

b) $k=2004=2^2\cdot 3^1\cdot 167^1$ egyenletbe az a helyébe fokozatosan 2004 osztóit tesszük. Számuk: $d(2004)=3\cdot 2\cdot 2=12$. Mivel az a helyébe negatív értéket is vehetünk, a megoldások száma megduplázódik, tehát 24 lesz.

c) Legyen d a k-nak egy tetszőleges osztója. Ekkor d és $\frac{k}{d}$ társosztók. Legyen $a=d$, ill. $a=\frac{k}{d}$, s ezt helyettesítsük be az egyenletbe: $d\sqrt{d^2-b}=k \Leftrightarrow b_d=d^2-\frac{k^2}{d^2}$; viszont $b_{\frac{k}{d}}=\frac{k^2}{d^2}-d^2$. Látható, hogy $\Sigma b=0$. Ha k négyzetszám, akkor az osztók száma.

A–I–5: Az $ABCD$ trapézban $(AB \parallel CD)$ érvényes, hogy $|AB|=2\cdot|CD|$. Jelölje E a BC oldal felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $|AB|=|BC|$ éppen akkor teljesül, ha az $AECD$ négyszög érintőnégyszög!

Megoldás: Teljesüljön az $|AB|=2\cdot|CD|$ feltétel és a $|BC|=|AB|$.



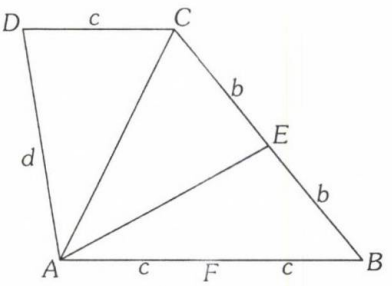
1. ábra

Ha F az AB oldal felezőpontját jelöli, akkor az $AFCD$ négyszög paralelogramma, ezért $|CF|=|AD|$.

Az ABC egyenlőszárú háromszögben AE és CF egyenlő szárakhoz tartozó súlyvonalak, ezért $|BC|=d$ is.

A leírtakból következik, hogy $|AD|+|EC|=c+d=|AE|+|CD|$, tehát $AECD$ érintőnégyszög.

Tegyük fel, hogy $AECD$ érintőnégyszög. Jelölje $2b$ a BC oldal hosszát. Azt kell belátnunk, hogy $b=c$ az $|AE|+c=b+d$ feltétel teljesülése mellett.



2. ábra

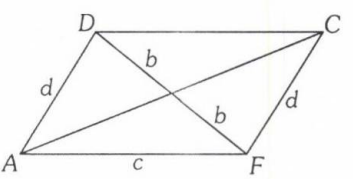
Az $ABC_\triangle$-nek AE a súlyvonala, ezért felírható:

$$|AE|^2=\frac{|AB|^2+|AC|^2}{2}-\frac{|BC|^2}{4}.$$

Beírva az adatokat kapjuk:

$$(b+d-c)^2=\frac{4c^2+|AC|^2}{2}-\frac{4b^2}{4}$$

$$(b+d-c)^2=2c^2+\frac{|AC|^2}{2}-b^2. \quad (*)$$



3. ábra

A 3. ábra alapján:

$$|AC|^2+4b^2=2\cdot(c^2+d^2),$$

ahonnan

$$\frac{|AC|^2}{2}=c^2+d^2-2b^2. \quad (**)$$

Ezt (*)-ba beírva kapjuk:

$$(b-c)(2b+c+d)=0 \Leftrightarrow b=c.$$

A–I–6: Határozzátok meg az összes $f\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ függvényt, amely egyidejűleg teljesíti a következő három feltételt:

a) Tetszőleges x, y nemnegatív és $x+y>0$ számokra érvényes az $f(x\cdot f(y))\cdot f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$ egyenlet.

b) $f(1)=0$.

c) $f(x)>0$ tetszőleges $x>1$-re.

Megoldás: Legyen $0\le x<1$ és $y=1$. Ekkor *a)* értelmében és az $\frac{xy}{x+y}=\frac{x\cdot 1}{x+1}=z$ jelölést is bevezetve kapjuk: $f(x\cdot f(1))\cdot f(1)=f(z)=0$ és $0\le z<1$, tehát ha $0\le x\le 1$, akkor $f(x)=0$.

Legyen $x>1$. Ha *a)*-ban $\frac{xy}{x+y}=1$, akkor azt kapjuk, hogy $f\left(\frac{y}{y-1}\cdot f(y)\right)\cdot f(y)=f(1)=0$ a *b)* szerint, ha az $\frac{xy}{x+y}=1$ egyenletből x-et kifejeztük. Nyilván $\frac{y}{y-1}=x>1$ érvényes. Az $\frac{y}{y-1}>1>0$-ból következik – figyelembe véve, hogy $y\in[0;\infty)$ –, hogy $y-1>0\Leftrightarrow y>1$; de ekkor *c)* szerint $f(y)>0$. Az $f\left(\frac{y}{y-1}\cdot f(y)\right)\cdot f(y)=0$ feltételből azonnal következik, hogy csak $f\left(\frac{y}{y-1}\cdot f(y)\right)=0$ lehet, amiből *b)* szerint $\frac{y}{y-1}\cdot f(y)=1$ következne: $f(y)=\frac{y-1}{y}$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$, ha $x>1$.

B kategória – 10. osztály előkészítő feladatok

B–I–1: Határozzátok meg az összes olyan (a, b) rendezett valós számpárt, amelyre az $x^2+ax+b=0$ és $x^2+(2a+1)\cdot x+2b+1=0$ egyenletek mindegyikének két különböző valós gyöke van, miközben a 2. egyenlet gyökei az 1. egyenlet gyökeinek reciprokai.

Megoldás: Ha az 1. egyenlet gyökeit x_1, x_2-vel jelöljük, a 2-ét pedig x_3, x_4-gyel, akkor felírható, hogy $x_3; x_4 \in \left\{\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}\right\}$.

Írjuk fel mindkét egyenletre a Viète-féle formulákat:

$$x_1+x_2=-a, \quad (1)$$

$$x_1\cdot x_2=b, \quad (2)$$

illetve:

$$x_3+x_4=-2a-1, \quad (3)$$

$$x_3\cdot x_4=2b+1. \quad (4)$$

De

$$x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a-1=\frac{-a}{b}\Leftrightarrow \frac{a}{b}=2a+1, \quad (5)$$

és

$$x_3\cdot x_4=\frac{1}{x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow 2b+1=\frac{1}{b}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+b-1=0. \quad (6)$$

(6)-ból:

$$(b+1)(2b-1)=0\Leftrightarrow b=-1, \text{ ill. } b=\frac{1}{2}.$$

A b értékeit (5)-be írva kapjuk: $a=-\frac{1}{3}$, ill. nincs ilyen a. Mivel a gyökök valósak és különbözők, ezért mindkét esetben a diszkriminánsnak:

$$D_1=a^2-4b>0,$$

ill.

$$D_2=(2a+1)^2-4\cdot(2b+1)>0$$

pozitívnak kell lennie.

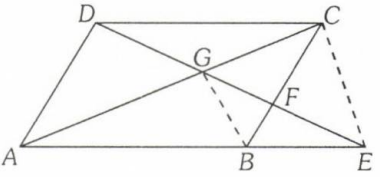
Az $(a;b)=\left(-\frac{1}{3};-1\right)$ teljesül is.

B–I–2: Adott az $ABCD$ paralelogramma. A D-n átfektetett egyenes az AC szakaszt a G pontban, a BC szakaszt az F pontban metszi, az AB félegyenest pedig olyan E pontban, hogy a BEF és CGF háromszögek kerülete egyenlő. Határozzátok meg az $|AG|:|GC|$ arányt!

Megoldás: Mivel $\ker_{BEF_\triangle}=\ker_{CGF_\triangle}$, ezért a $BECG$ négyszög trapéz.

A párhuzamos szelők tételéből:

$$\frac{|GC|}{|AG|}=\frac{|BE|}{|AB|}.$$



Adjunk mindkét oldalához az egyenletnek 1-et:

$$\frac{|GC|}{|AG|}+1=\frac{|BE|+|AB|}{|AB|}=\frac{|AE|}{a}.$$

Az $AEG_\triangle = CDG_\triangle$-ből:

$$\frac{|AE|}{|CD|}=\frac{|AG|}{|GC|}\Leftrightarrow\frac{|AE|}{a}=\frac{|AG|}{|GC|}.$$

Bevezetve az $x=\frac{|AG|}{|GC|}$ jelölést (1) így alakul:

$$\frac{1}{x}+1=x\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

B–I–3: Az asztalon $k\geq 3$ számú kupac kavics található az egyes kupacokban 1, 2, 3, ..., n számú kaviccsal. Minden lépésben kivehetünk az asztalon tetszőleges 3 kupacot, amelyből egy kupacot csinálunk, és hozzáadunk 1 olyan kavicsot, amely eddig az asztalon nem volt. Ha néhány lépés után egyetlen kupac adódik, akkor az összes kavicsszám nem osztható 3-mal. Bizonyítsuk be!

Megoldás: Ha mindig 3 kupac kavicsból csinálunk egyet, akkor a kupacok száma mindegyik alkalommal 2-vel csökken, következésképpen n csak páratlan lehet, tehát legyen az egyes kupacokban található kezdeti kavicsszám: 1, 2, 3, ..., $2k-1$.

$$S_0=1+2+3+\ldots+(2k-1)=$$
$$=\frac{1+(2k-1)}{2}\cdot(2k-1)=k\cdot(2k-1)$$

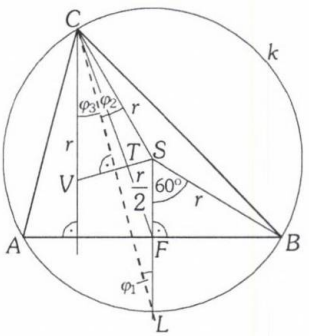
a kezdeti összeg.

	kupacok száma	kavicsok száma
1. lépés után:	$(2k-1)-2$	$k(2k-1)+1$
2. lépés után:	$(2k-1)-4$	$k(2k-1)+2$
	⋮	⋮
$(k-1)$-dik lépés után:	$2k-1-(2k-2)$	$k(2k-1)+\frac{2k-2}{2}=S_{k-1}$

Azt kell belátnunk, hogy $3\nmid S_{k-1}$-nek; $S_{k-1}=2k^2-1$; mivel $k^2\equiv 0 \pmod 3$ vagy $k^2\equiv 1 \pmod 3$, ezért állításunk igaz.

B–I–4: Jelölje V az $ABC_\triangle$ magasságpontját, S pedig köréírt körének középpontját. Az $ABC_\triangle$ nem szabályos. Bizonyítsuk be, hogy ha az $|ACB\sphericalangle| = 60°$, akkor az ACB szög felezője felezőmerőlegese VS-nek!

Megoldás: Közismert, hogy a CL szögfelező és az AB oldal felezőmerőlegese a k körülírt közös L pontjában metszik egymást. Következésképpen $CLS_\triangle$ egyenlő szárú, s így $\varphi_1=\varphi_2$. Az $SL\parallel CV$ miatt φ_1 és φ_3 váltószögek, ezért $\varphi_1=\varphi_3\Rightarrow\varphi_2=\varphi_3$.



A T súlypont szerint $TSF_\triangle$ a $TVC_\triangle$-gel hasonló helyzetű és $\lambda=-\frac{1}{2}$; mivel $|FSB\sphericalangle| = 60°$, ezért $|SF|=\frac{r}{2}$, tehát $|CV|=2\cdot|SF|=r$, a $CVS_\triangle$ egyenlő szárú. Az ilyen háromszögben a szögfelező egyben magasságvonal, tehát VS szimmetriatengelye is.

B–I–5: A valós számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletet $\frac{x}{x+4}=\frac{5\cdot\lfloor x\rfloor-7}{7\cdot\lfloor x\rfloor-5}$, ahol $\lfloor x\rfloor$ a valós szám ún. alsó egész részét jelöli, amely a legnagyobb olyan egész szám, amely nem haladja meg x-et!

Megoldás: Az egyenletből fejezzük ki $\lfloor x\rfloor$-et:

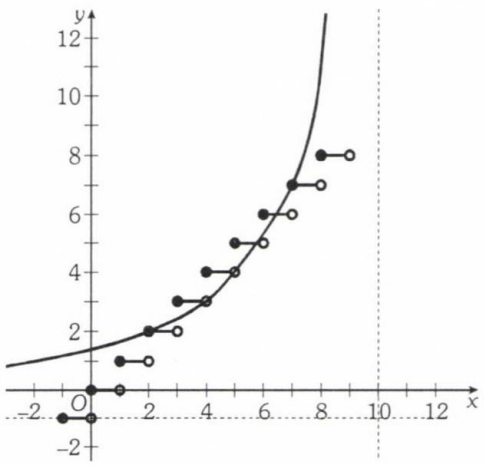
$$\lfloor x\rfloor=\frac{x+14}{10-x}.$$

A grafikus megoldásnál leolvasható, hogy $x\geq 2$.

1. eset: $\lfloor x\rfloor=2$; $2=\frac{x+14}{10-x}$, $x=2$ megoldás.

2. eset: $\lfloor x \rfloor = 3$; $x = 4$ lesz, ami nem megoldás.
3. eset: $\lfloor x \rfloor = 4$; $x = 5{,}2$ lesz, de itt $\lfloor x \rfloor \neq 4$.
4. eset: $\lfloor x \rfloor = 5$; $x = 6$, itt is $\lfloor x \rfloor \neq 5$.
5. eset: $\lfloor x \rfloor = 6$; $x = \frac{46}{7}$, megoldás.
6. eset: $\lfloor x \rfloor = 7$; $x = 7$, megoldás.

Ha $x \geq 8$, akkor már a hiperbola meredeksége nagyobb, ezért nincs több megoldás.

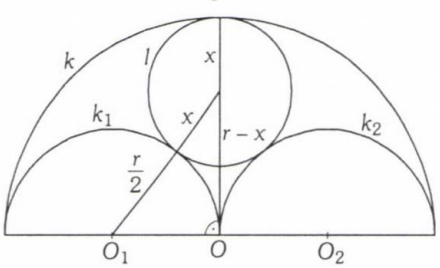


B–I–6: Az r sugarú k körbe $\frac{r}{2}$ sugarú egymással érintkező k_1, k_2 köröket írunk. Az l kör a k_1, k_2 körökkel kívülről érintkezik, a k-val pedig belső érintkezése van. Az m körnek k_2-vel és l-lel külső, a k-val belső érintkezése van. Határozzátok meg l és m sugarainak nagyságát.

Megoldás: Az l kör x sugara az $O_1OL_{\triangle}$-ből Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$\left(\frac{r}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{r}{3}.$$

Hasonló, kissé hosszabb számolással adódik, hogy az m kör sugara $\frac{r}{6}$.



C kategória – 9. osztály előkészítő feladatok

C–I–1: Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, amelyekre teljesül az $a+d=b+c$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \geq 0.$$

Megoldás: Végezzük el a szorzást az egyenlőtlenség bal oldalán:

$$ac-bc-ad+bd+ab-ad-bc+cd+ \\ +bd-ab-cd+ac \geq 0.$$

Összevonás után kapjuk:

$$2ac-2bc-2ad+2bd \geq 0 \quad /:2.$$

Kettővel való osztás, csoportosítás és kétszeres kiemelés után adódik:

$$a(c-d)-b(c-d) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(c-d) \geq 0.$$

A feltételt felhasználva: $c-d=a-b$, bal oldalon $(a-b)^2 \geq 0$, ami valós számokra mindig igaz. Mivel csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a menet megfordítható, tehát a bizonyítást elvégeztük.

C–I–2: Állapítsátok meg, mely $n \geq 2$ természetes számokra érvényes, hogy az $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ halmazból ki tudunk választani különböző páros természetes számokat úgy, hogy összegük osztható n-nel.

Megoldás: Az állítás $n = 2$-re, $n = 3$-ra, $n = 4$-re, $n = 5$-re, $n = 7$-re nyilván nem érvényes, $n = 6$-ra igen, hiszen az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból kiválasztható a 2 és 4 úgy, hogy $6 \mid (2+4)$-et.
Belátjuk, hogy $n = 2k$ és $n = 2k+1$-re minden $k \geq 4$ esetén az állítás érvényes.
(*) $n = 2k$ és $k \geq 4$, ekkor a halmaz:

$$\{1; 2; 3; 4; \ldots; 2k-2; 2k-1\}.$$

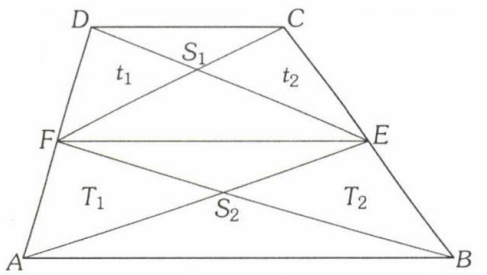
Ekkor $2+(2k-2)=2k$ jó, hiszen $k \geq 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2k \geq 8 \Rightarrow 2k-2 \geq 6 > 2$ különbözőek a 2 és $2k-2$.
(**) $n = 2k+1$, ekkor a halmaz:

$$\{1; 2; 3; 4; \ldots; 2k-2; 2k-1; 2k\}.$$

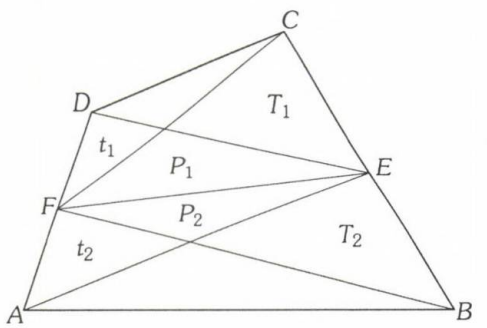
Ekkor $2k+1$ osztója a $2k+(2k-2)+4 =$ $= 4k+2 = 2(2k+1)$ összegnek.

C–I–3: Tetszőleges $ABCD$ konvex négyszögben jelölje E a BC oldal felezőpontját és F pedig az AD oldal felezőpontját. Bizonyítsátok be, hogy az AED és BFC háromszögek éppen akkor egyenlő területűek, ha az AB és CD oldalak párhuzamosak.

Megoldás: Legyen $AB \parallel CD$-vel. Kössük össze E-t F-fel. Ekkor fennáll, hogy $AB \parallel EF \parallel CD$-vel. Ezen feltételből következik, hogy $t_1 = t_2$, ill. $T_1 = T_2$.



Mivel az ES_1FS_2 négyszög területe mindkét háromszög területében megtalálható, ezért állításunk első részét bizonyítottuk.
Tegyük fel, hogy $\text{ker}_{AED} = \text{ker}_{BFC}$; t_1, t_2, P_1, P_2, T_1, T_2 területeket jelölnek.



A feltétel alapján felírhatjuk a következő egyenleteket, mivel $P_1 + P_2$ mindkettőben közös:

$$t_1 + t_2 = T_1 + T_2, \quad (1)$$
$$t_2 + P_2 = t_1 + P_1, \quad (2)$$
$$T_1 + P_1 = T_2 + P_2. \quad 3)$$

(1) + (2) + (3):

$$t_1 + 2t_2 + T_1 + P_1 + P_2 = \\ = t_1 + 2T_2 + T_1 + P_1 + P_2,$$

amiből a $t_2 = T_2$ egyenlőség adódik, ami azt is jelenti, hogy $AB \parallel EF$.

A $t_2 = T_2$-t (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy $t_1 = T_1$, amiből $EF \parallel CD$ adódik, s így: $AB \parallel CD$.

C–I–4: A k, l, m négyjegyű számok mindegyikének alakja: $ABAB$. Az l számban az egyesek helyén 2-vel nagyobb szám áll, mint a k számban, viszont az l szám tízesének helyén álló számjegye 1-gyel kisebb, mint a t szám tízesének számjegye. A k és l számok összege olyan m szám, amely 9-cel osztható. Határozzátok meg az összes ilyen k számot!

Megoldás: $k = \overline{ABAB} = 1010A + 101B$ és $k = 1010(A + 1) + 101(B - 2)$; összegük

$$m = k + l = 202(10A + B + 4) = \\ = 202(9A + (A + B + 4)).$$

Esetek:

$A = 1$; $B = 4$; $k = 1414$.
$A = 2$; $B = 3$; $k = 2323$.
$A = 3$; $B = 2$; $k = 3232$.
$A = 4$; $B = 1$; nem felel meg $B \geq 2$ miatt.
$A = 5$; $B = 9$; $k = 5959$.
$A = 6$; $B = 8$; $k = 6868$.
$A = 7$; $B = 7$; $k = 7777$.
$A = 8$; $B = 6$; $k = 8686$.

Összesen: 7 megoldás.

C–I–5: Határozzátok meg az összes olyan a, b, c kétjegyű természetes számhármast, amelyre az abc szorzat minden számjegye megegyezik! A csak sorrendben különböző számhármasokat nem tekintjük különbözőnek.

Megoldás: Mivel $10 \leq a; b; c < 100$, ezért $1000 \leq abc < 1000000$, ezért abc alakja $\overline{nnnn}$, $\overline{nnnnn}$, ill. $\overline{nnnnnn}$ lehet. $\overline{nnnn} = n \cdot 1111 = \\ = n \cdot 11 \cdot 101$ és 101 prím, ezért az ilyen alakú szorzat nem jöhet számításba. Hasonló megállapítás érvényes az $\overline{nnnnn} = n \cdot 11111 = \\ = n \cdot 41 \cdot 271$, mivel 271 is prím. Következésképpen csak az $\overline{nnnnnn} = n \cdot 111111 = \\ = n \cdot 111 \cdot 1001 = n \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = \\ = n \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

1. eset: $n = 1$. Két eset lehetséges:

$(3 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 13) \cdot 37 = (7 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 13) \cdot 37$

(a 37-et már 3-mal szorozva is túllépném a 100-at).
Tehát: $33 \cdot 91 \cdot 37 = 77 \cdot 39 \cdot 37$; 2 megoldás.

2. eset: $n = 2$. A szám:

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 =$$
$$= (3 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 37) =$$
$$= (7 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 37) =$$
$$= (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 13) \cdot 37 =$$
$$= (7 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 13) \cdot 37 = 33 \cdot 91 \cdot 74 =$$
$$= 77 \cdot 39 \cdot 74 = 66 \cdot 91 \cdot 37 = 77 \cdot 78 \cdot 37$$

4 megoldás.

3. eset: $n = 3$.

$$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 =$$
$$= (3 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 13) \cdot 37 = 99 \cdot 91 \cdot 37$$

1 megoldás.

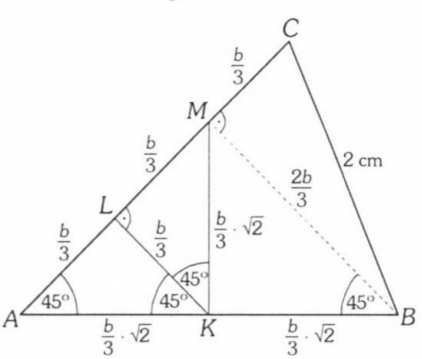
4. eset: $n = 4$.

$$4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 =$$
$$= (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 37) = 74 \cdot 66 \cdot 91;$$

2 megoldás.

C–I–6: Az $ABC_\triangle$-ben $|BC| = 2$ cm és K az AB oldal középpontja. Az L és M pontok az AC oldalt 3 egyenlő részre osztják. A $KLM_\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű. Határozzátok meg az összes ilyen $ABC_\triangle$ AB és AC oldalát!

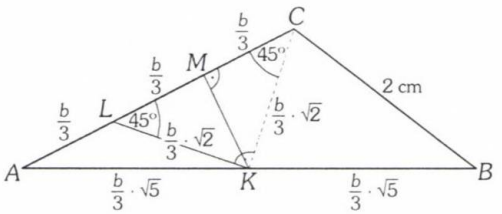
Megoldás: 1. eset: $|KLM\sphericalangle| = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow |LK| = |LM| = \frac{b}{3}$.



Az ábrából leolvasható, hogy $A\sphericalangle = 45°$, amiből $\frac{c}{2} = \frac{b}{3} \cdot \sqrt{2}$ is következik, azaz $c = \frac{2b\sqrt{2}}{3}$. Az $ABM_\triangle$ is egyenlő szárú, és mivel $|BAM\sphericalangle| = |ABM\sphericalangle| = 45°$, ezért $|BMC\sphericalangle| = 90°$.
A $BMC_\triangle$-re felírható Pitagorasz tétele:

$$2 = \frac{b}{3} \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow b = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$
$$c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

2. eset: $|KML\sphericalangle| = 90°$. A feltétel alapján az ábrán látható adatok bejelölhetők.



A $\frac{b}{3} \cdot \sqrt{2}$ súlyvonal kifejezhető:

$$\left(\frac{b}{3} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{b^2 + 2^2}{2} - \frac{\left(\frac{2b}{3} \cdot \sqrt{5}\right)^2}{4}.$$

Rendezve:

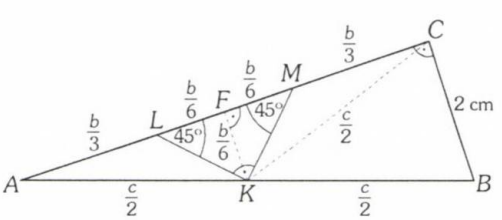
$$\frac{7b^2}{9} = \frac{b^2 + 4}{2}$$
$$14b^2 = 9b^2 + 36,$$

amiből: $5b^2 = 36$, $b = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm;

$$c = \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 4 \text{ cm}.$$

3. eset: $|LKM\sphericalangle| = 90°$. Jelölje F az AC oldal felezőpontját. Mivel $LKM_\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű, ezért $FK \perp AC$-re és $|AK| = |KC| = |KB|$, $|BCA\sphericalangle| = 90°$. Mivel $LFK_\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű, ezért $\frac{b}{6} = 1 \text{ cm} \Leftrightarrow b = 6 \text{ cm}$;

$$c = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{10} \text{ cm}.$$



Urbán János

A XXXIV. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület ebben az évben is Vácott rendezte meg az Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjét 2005. június 27–29-ig. A döntőbe a megyei forduló összesített eredménye alapján az 5. osztályosok közül 15, a 6. osztályosok közül 25, a 7. osztályosok közül 23, a 8. osztályosok közül 21 tanuló jutott be. A kétnapos verseny összesítéseként a legjobb eredményeket a következő tanulók érték el:

5. osztály

1. Beke Lilla, Nyírlugos, Nyírlugosi Általános Iskola (tanára: Beke Dénes),
2. Szőts János, Baja, Alsóvárosi ÁMK (tanára: Szenorabszki Rózsa),
3. Gárdos Tamás, Budapest, Lauder Javne Zsidó Közösségi Iskola (tanára: Kósa Tamás).

6. osztály

1. Zempléni Réka, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola (tanára: Marcsek Gábor),
2. Böőr Katalin, Békéscsaba, Petőfi utcai Általános Iskola (tanára: dr. Lipták Pálné),
3. Mihálykó András, Veszprém, Padányi Bíró Márton Római Katolikus Általános Iskola (tanára: Egerszegi Éva).

7. osztály

1. Éles András, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium (tanárai: Remeténé Orvos Viola, Kovács Péter),
2. Fonyó Dávid, Keszthely, Egry József Általános Iskola (tanára: dr. Púposné Szálteleki Éva),
3. Bohus Kinga, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium (tanára: Fazakas Tünde).

8. osztály

1. Nagy Dániel, Hajdúböszörmény, Bocskai István Általános Iskola (tanárai: Juhász László, Hajdú Mihály, Pósa Lajos),
2. Radnai Ágnes, Budapest, Veres Péter Gimnázium (tanára: Számadóné Békéssy Szilvia),
3. Grósz Dániel, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium (tanárai: Hraskó András, Rubóczky György, Pósa Lajos).

A döntő két napján a versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

Ötödik osztály
1. nap

1. Felírtuk a pozitív egész számokat egy nagy papírra 1-től 10 000-ig, és kihúztuk azokat, amelyekben szerepel a 0 vagy a 9 számjegy. Hány szám maradt?

2. 14 különböző pozitív egész szám összege 110. Melyek ezek a számok?

3. Egy kockát mind a 6 lapjára tükrözünk. Az eredeti kockával együtt így egy új testet kapunk. Hányszorosa a kapott test felszíne az eredeti kocka felszínének?

4. Egy téglalap alakú csokoládé tábla 5-ször 6 darab kis négyzet alakú csokoládéból áll. Egy töréssel minden csokoládétábla darabot két részre törhetünk a darab szélétől a másik széléig. Legkevesebb hány törésre van szükség ahhoz, hogy a csokoládétáblát 30 kis darabra törjük?

Hatodik osztály
1. nap

1. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is adunk meg 6 négyzetszámot, biztosan van közöttük 2 olyan, amelyeknek vagy az összege, vagy a különbsége osztható 10-zel!

2. Három pozitív egész szám szorzata 1995. A legkisebb és legnagyobb tényező prímszám. A három tényező közül melyik a középső?

3. A következő összeadásban azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek:

$$\begin{array}{r} ABCD,E \\ +ABCD,E \\ \hline FEGEH \end{array}$$

Milyen számjegyeket jelölnek az egyes betűk?

4. Egy 5×5-ös négyzetrácsos papírdarab mind a 25 kis négyzetét befestjük a piros, kék, sárga és zöld színek valamelyikére úgy, hogy bármelyik 2×2-es résznégyzetben a 4 kis négyzet különböző színű legyen. Legfeljebb mekkora lehet a piros négyzetek száma?

Hetedik osztály
1. nap

1. Melyik lehet az a két pozitív egész szám, amelyekre igaz, hogy a négyzeteik különbsége 2005?

2. Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogóhoz tartozó magasság CD, a derékszög felezője CE, és az átfogóhoz tartozó súlyvonal CF. Tudjuk, hogy $FE = 2DE$. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

3. Egy papírdarabot felvághatunk 8 vagy 12 darabra. A kapott darabok közül bármelyiket ismét felvághatjuk 8 vagy 12 darabra, és így tovább. Ezzel a módszerrel kaphatunk-e (egy papírlapból kiindulva) 60 papírdarabot? És 70-et?

4. Két dobozban összesen 257 golyó van, pirosak, zöldek, sárgák és kékek. Tudjuk, hogy nincs köztük 5 különböző súlyú, azonos színű golyó. Bizonyítsuk be, hogy legalább az egyik dobozban van legalább 9 azonos színű és azonos súlyú golyó!

5. Figyeld meg a következő szorzásokat és fogalmazz meg egy általános állítást!

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$33 \cdot 34 = 1122$$
$$333 \cdot 334 = 111222$$

Bizonyítsd be az állítást!

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet:

$$\frac{104}{xyz} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy a kocka csúcsai közül kiválasztható 4 úgy, hogy az ezek által meghatározott tetraéder minden lapja derékszögű háromszög! Számítsuk ki e tetraéder élei hosszának összegét, ha a kocka éle 1 egység!

3. Egy 8×8-as négyzetrácsos mezőn egy 3×1-es téglalap alakú „csatahajót" helyeztünk el úgy, hogy az ellenfél nem tudja a hajó pontos helyét. Legkevesebb hány „lövést" kell leadni ahhoz, hogy a csatahajót biztosan eltalálja (egy „lövés" egy négyzetet talál el)?

4. Egy szabályos hatszögnek meghúztuk az összes átlóját. Hányfajta olyan egyenlő szárú háromszöget kaptunk, amelynek minden oldala egy-egy hatszögoldal, vagy egy átló egy darabja? A különböző típusú (nem egybevágó), egyenlő szárú háromszögek területének összege hányad része a szabályos hatszög területének?

5. Egy kör kerületére 2005 darab fekete pontot és egy piros pontot rajzoltunk. Melyik fajta sokszögből van több? Azokból, amelyeknek csúcsai a fekete pontok közül kerülnek ki, vagy azokból, amiknek van piros csúcsa is?

Ötödik osztály
2. nap

1. Egy dobozban piros, fehér és kék golyók vannak. Tudjuk, hogy legalább 12 golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen köztük piros, legalább 11-et, hogy legyen köztük fehér, és legalább 10-et, hogy legyen köztük kék. Hány piros, hány fehér és hány kék golyó van a dobozban?

2. Egy kocka 6 csúcsára 1-et, két csúcsára 2-t írunk. Ezután az élekre ráírtuk a két végpontjában álló számok összegét, a lapok középpontjára pedig a lapot határoló élekre írt számok összegét. Mennyi a kocka 6 lapközépontjára írt számok összege?

3. Andris, Bálint és Csaba közösen vásároltak 6 ezer forintért egy focilabdát. Tudjuk, hogy mindegyikük annyi pénzt adott a közös labda árához, aminek a 2-szerese nem nagyobb, mint a másik kettő által adott pénz összege. Mennyit fizetett Csaba a közös labdába?

4. Egy kört 8 egyforma (egybevágó) körcikkre bontunk. Írjuk be ezekbe a körcikkekbe az összes olyan háromjegyű számot, amelyben csak 1-es és 2-es számjegyek szerepelnek! A beírást úgy kell elvégezni, hogy bármely két szomszédos körcikkbe írt szám csak egyetlen számjegyben különbözzön!

Hatodik osztály
2. nap

1. Bizonyítsuk be, hogy $73^{37} + 37^{73}$ osztható 10-zel!

2. Egy sárkánynak 1000 feje van. A mesebeli vitéz egy csapással vagy 33, vagy 21, vagy 17, vagy 1 fejét tudja levágni. Az egyes esetekben sorra 48, 0, 14 vagy 349 feje nő ki a sárkánynak. Ha a sárkánynak már nincs feje, akkor nem nő ki új, a sárkány elpusztul. Le tudja-e győzni a vitéz a sárkányt?

3. Egy kocka minden oldallapját 4 egyforma (egybevágó) négyzetre osztottuk, és minden kisebb négyzetet kiszíneztünk piros, kék vagy zöld színnel úgy, hogy ha két négyzetnek van közös oldala, akkor azok színe különböző legyen. Hány négyzet lett piros, hány kék és hány zöld?

4. A következő számháromszöget

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

.....

úgy képezzük, hogy a második sortól kezdve minden szám a közvetlenül felette álló és ettől jobbra és balra álló 3 szám összege (a hiányzó számot 0-val pótoljuk). Igazoljuk, hogy a harmadik sortól kezdve minden sorban van páros szám!

Hetedik osztály
2. nap

1. Hányféleképpen lehet a 2005-öt egymást követő pozitív egész számok összegeként előállítani (az összeg legalább 2 tagú)?

2. Egy 3×3-as négyzetnek mind a 9 mezőjét befestjük egy-egy színnel úgy, hogy bármely két olyan színhez, amit a festéshez használtunk, van két olyan mező, amelynek van közös oldala, és a mezők színe a két kiválasztott szín. Legfeljebb hány színt használhatunk a festéshez?

3. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja F. Az AC befogó egy tetszőleges P pontjából merőlegest állítunk AC-re, ennek metszéspontja CF-fel Q, BA-val R. Igazoljuk, hogy $PQ + PR = BC$!

4. Igazoljuk, hogy a következő hatjegyű számokra vonatkozó 7-tel és 13-mal való oszthatósági szabály helyes. A szabály: az *abcdef* hatjegyű szám mellé elkészítjük az *abcabc* hatjegyű számot. Ezután a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet. Az eredeti szám akkor és csak akkor osztható 7-tel és 13-mal, ha a kapott háromjegyű szám osztható 7-tel és 13-mal.

Nyolcadik osztály
2. nap

1. Egy körlapot 16 egybevágó körcikkre bontunk. Igazoljuk, hogy az összes négyjegyű, csak 1-es és 2-es számjegyet tartalmazó szám az egyes körcikkekbe beírható úgy, hogy a szomszédos körcikkekbe írt számok csak egyetlen számjegyben különbözzenek!

2. Az ABC háromszög területe 4 egység. Meghosszabbítjuk az AB oldalt B-n túl az AB szakasz felével, így a P pontot kapjuk, a BC oldalt C-n túl a BC oldal felével, így a Q-t kapjuk, és a CA oldalt A-n túl a CA felével, így az R ponthoz jutunk. Mennyi a PQR háromszög területe?

3. Igazoljuk, hogy bármely 52 pozitív egész szám közül kiválasztható 2 úgy, hogy ezek összege vagy különbsége osztható 100-zal!

4. Hány olyan téglatest van, amelynek élei centiméterekben mérve egész számok, és a téglatest felszínét és térfogatát ugyanaz a szám fejezi ki (cm^2-ben, ill. cm^3-ben)?

Dr. Kántor Sándorné

A 2004/2005 évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A 2004–2005. tanévben 2004. november 10-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai Intézete és a BJMT Hajdú-Bihar megyei Tagozata közös szervezésében.

A verseny koordinátora Lajkó Károly, a versenybizottság vezetője Kántor Sándorné volt.

A versenyen 1300-nál több tanuló vett részt a város és a megye középiskoláiból, akik évfolyamonként versenyeztek három kategóriában. Az 5 feladatból álló feladatsor kidolgozására 3 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

A versenybizottság sikeresnek értékelte a tanulók teljesítményét, és 35 tanár 66 diákját részesítette helyezésben vagy dicséretben.

A feladatsorokat a DE Matematikai Intézetének oktatói állították össze:

9. évfolyam: Kovács András, 10. évfolyam: Kántor Sándor, 11. évfolyam: Bérczes Attila és Kántor Sándorné, 12. évfolyam: Kántor Sándorné.

Az idén a 11. és 12. évfolyam feladatsora bizonyult nehezebbnek.

A verseny eredményei

9. évfolyam

Gimnáziumok:

I. díj: Varga Imre (Hajdúszoboszló, Hőgyes), Ruzicska Erzsébet (DE Kossuth),

II. díj: Ancza Fruzsina és Szekeres Balázs (Hajdúböszörmény Bocskai),

III. díj: Szilágyi György (TÁG) és Marincsák Miklós (Szent József Gimn.).

Speciális matematika tagozat (FMG):

I. díj: Tóth László és Csóka Győző

III. díj: Gaál Zsuzsanna.

Szakközépiskolák:

III. díj: Dobi Katalin és Szabó Annamária (Bethlen G. SzKI).

10. évfolyam

Gimnáziumok:

II. díj Kovács József (Hajdúböszörmény, Bocskai)

III. díj: Bíró Tamás (TÁG) és Csatári Tamás (Hajdúböszörmény Bocskai).

Speciális matematika tagozat (FMG):

I. díj: Berna Zoltán és Horváth Gergely,

II. díj: Vincze János,

III. díj: Lóska Ádám és Tóthmérész Lilla.

Szakközépiskolák: –

11. évfolyam

Gimnáziumok:

I. díj: Máté Balázs (TÁG) és Kovács Péter (DE Kossuth),

II. díj: Boros Péter (TÁG).

Speciális matematika tagozat (FMG):

III. díj: Mikulán Attila.

Szakközépiskolák: –

12. évfolyam

Gimnáziumok:

I. díj: Varga Zoltán (Hajdúszoboszló Hőgyes),

II. díj: Háló Albert (TÁG) és Sóvágó Sándor (Hajdúböszörmény Bocskai).

Speciális matematika tagozat (FMG):

III. díj: Kovács Máté.

Szakközépiskolák: –

(A következő rövidítéseket használtuk: TÁG: Tóth Árpád Gimnázium, DE Kossuth: DE Kossuth Gimnázium, Hajdúszoboszló Hőgyes: Hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúböszörmény Bocskai: Hajdúböszörményi Bocskai Gimnázium, FMG: Fazekas Gimnázium Debrecen, Bethlen: Bethlen Gábor Kereskedelmi és Postaforgalmi Szakközépiskola.)

A versenyen kitűzött feladatok

9. évfolyam

1. András a nagypapájától egy régi faliórát kapott. Az óra minden egész órakor annyit üt, amilyen számra a számlapon a kismutató éppen akkor mutat. Ezen kívül a szerkezetből minden óra 15 perckor 1, minden óra 30-kor kettő, és minden óra 45-kor három ütés hallható. Egy nap alatt összesen hányat üt az óra?

8 pont

2. Az utcáról az iskola kapujáig 5 lépcső vezet fel. Béla reggelente vagy egyesével, vagy kettesével szedi a lépcsőfokokat. Hányféleképpen juthat fel Béla a lépcsőn?

10 pont

3. Egy régi feladat szerint valaki elad két lovat és két nyerget. Az egyik nyereg ára 120 peták, a másiké 25 peták. Az első ló a drága nyereggel háromszor annyiba kerül, mint a második ló az olcsó nyereggel. A második ló a drága nyereggel viszont feleannyiba kerül, mint az első ló az olcsó nyereggel. Hány petákba kerül a drágább ló, és mennyibe az olcsóbb?

12 pont

4. Kössük össze egy szabályos háromszög egyik belső pontját a csúcsokkal. Lehet-e minden esetben az így kapott három szakaszból háromszöget szerkeszteni?

14 pont

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$|x| - \{x\} = 0$$

egyenletet.

16 pont

Megjegyzés:
Egy x szám $[x]$ az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az x számnál.
Egy x szám $\{x\}$ törtrésze az $x - [x]$ szám.

10. évfolyam

1. Bontsa tényezőkre az

$$ab(a-b) - ac(a+c) + bc(2a+c-b)$$

kifejezést!

8 pont

2. Két pozitív egész szám hányadosa $\frac{3}{8}$, összege egy prímszám köbe. Melyek ezek a számok?

12 pont

3. Szerkessze meg azt az egyenlőszárú háromszöget, amelynek adott a szárszöge és a szárához tartozó súlyvonal hossza!

12 pont

4. Bizonyítsa be, hogy ha két pozitív egész szám négyzetének összege osztható hárommal, akkor osztható kilenccel is!

12 pont

5. Egy háromszögben két-két magasság hosszát összeadva a kapott három szám aránya $5 : 7 : 8$. Mennyi a háromszög oldalainak az aránya?

16 pont

11. évfolyam

1. Bizonyítsa be, hogy

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq$$
$$\geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Mikor állhat fenn egyenlőség?

8 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = x-3.$$

10 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív természetes szám esetén $(n+1)(5^n - 3^n)$ osztható 4-gyel.

12 pont

4. Az ABC háromszögben $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$, a súlyvonalak metszéspontja S. Az A, B és C pontokat az S pont körül 180°-kal elforgatva rendre az A', B', C' pontokat kapjuk. Mennyi az ABC és $A'B'C'$ háromszöglapok egyesítésével keletkező síkidom területe?

14 pont

5. Legyen $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ egy függvény: Bizonyítsuk be, hogy amennyiben

$$f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) = 2f(x) + 3, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\},$$

akkor f konstans függvény.

16 pont

12. évfolyam

1. Legyenek u és v olyan egész számok, amelyekre $0 < v < u$ teljesül! Az $A(u; v)$ pontot tükrözzük az $y = x$ egyenesre. A tükörképet jelöljük B-vel, a B pontnak az y tengelyre vonatkozó tükörképét C-vel, a C

pontnak az x tengelyre vonatkozó tükörképét D-vel, a D pontnak az y tengelyre vonatkozó tükörképét E-vel.
Az így keletkező $ABCDE$ ötszög területe 451. Adjuk meg az ötszög csúcspontjainak koordinátáit!

9 pont

2. Az ABC háromszöget a BC oldalával párhuzamos e egyenessel úgy tudjuk kettévágni, hogy a keletkező két síkidom területe is és kerülete is egyenlő. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög $d_{BC} = a$, $d_{AC} = b$, $d_{AB} = c$ oldalai között a $b + c = a(\sqrt{2} + 1)$ összefüggés érvényes!

12 pont

3. 4 millió forint készpénzünket a bank ajánlatára változó kamatozásra tettük be 3 éves futamidőre. Az első évben 10%-os volt a kamatláb, a második évben a bank a kamatlábat p%-kal, a harmadik évben ismét p%-kal emelte meg. Így a harmadik év végén 293 920 Ft-tal többet kaptunk, mintha 3 éven át 10%-os kamatos kamatra helyeztük volna el a pénzünket. Hány %-os volt a kamatlábemelés a 2. és 3. évben?

12 pont

4. Egy téglatest A csúcsából induló éleinek hossza 1, 2, 3. Ezeknek az éleknek az A csúcstól különböző végpontjai egy síkot határoznak meg. Milyen távol van az A csúcs ettől a síktól?

13 pont

5. Két számtani sorozat azonos indexű tagjait összeszoroztuk. Így kaptuk meg a $c_0 = a_0b_0 = 1440$, $c_1 = a_1b_1 = 1716$, $c_2 = a_2b_2 = 1848$, ..., $c_n = a_nb_n$ sorozatot. Határozza meg ennek a sorozatnak a nyolcadik tagját!

15 pont

A kitűzött feladatok megoldása

9. évfolyam

1. Az egész órakor hallható ütések száma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 24 = \frac{1 + 24}{2} \cdot 24 = 300.$$

4 pont

Az egész órák között $1 + 2 + 3 = 6$ ütést ad ki az óra.

1 pont

Az ebből származó ütések száma összesen $24 \cdot 6 = 144$.

1 pont

Egy nap alatt az óra $300 + 144 = 444$ ütéssel szolgál.

2 pont

Összesen 8 pont

2. Béla az első fokra 1-féleképpen, a másodikra 2-féleképpen (vagy közvetlenül, vagy az elsőről felugorva) juthat fel.

2 pont

Általában is igaz, hogy egy adott lépcsőfokra az eggyel vagy a kettővel alatti lépcsőről lehet feljutni. A lehetőségek száma tehát az előző két lépcsőfokra való feljutás lehetőségeinek összege.

4 pont

Emiatt a 3. lépcsőfokra 3-féleképpen, a 4.-re 5-féleképpen és az 5.-re 8-féleképpen lehet felmenni.

4 pont

Összesen 10 pont

3. A két ló a nyergekkel együtt 4-szer annyit ér, mint a második ló az olcsóbb nyereggel.

2 pont

A két ló a nyergekkel együtt 3-szor annyit ér, mint a második ló a jobb nyereggel.

2 pont

A jobb nyereg és az olcsóbb nyereg közötti $120 - 25 = 95$ peták $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ része a két ló együttes árának.

4 pont

A lovak és a nyergek összesen $12 \cdot 95 = 1140$ petákba kerülnek.

2 pont

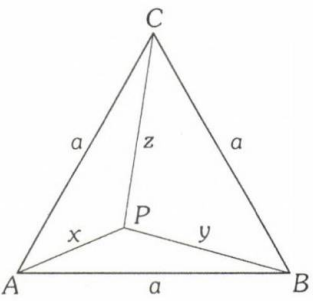
A második ló $285 - 25 = 260$, az első $1140 - 260 - 120 - 25 = 1140 - 405 = 735$ petákba kerül.

2 pont

Összesen 12 pont

4. A három szakaszból pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha az oldalaira teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

2 pont



Az $ABP_\triangle$-ben (1) $x + y > a$.

2 pont

Mivel az $APC_\triangle$ P csúcsa az $ABC_\triangle$ belsejében található, ezért az x és z oldalakkal szemben 60°-nál kisebb, az a oldallal szemben 60°-nál nagyobb szög található.

2 pont

Emiatt az $APC_\triangle$-ben (2) $a > z$.

2 pont

(1) és (2) alapján $x + y > z$.

2 pont

Hasonlóan igazolható, hogy $x + z > y$ és $y + z > x$.

2 pont

Az x, y és z szakaszokból tehát mindig szerkeszthető háromszög.

2 pont

Összesen 14 pont

5. A törtrész definíciójából következik, hogy $0 \le \{x\} < 1$.

1 pont

Emiatt az $|x| = \{x\}$ egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $0 \le |x| < 1$.

1 pont

Ez a feltétel $-1 < x < 1$ esetén áll fenn.

1 pont

$0 \le x < 1$ esetén $x = \{x\}$ az adott intervallumon azonosság. (Egy 0 és 1 közötti szám törtrésze magával a számmal egyezik meg.)

3 pont

$-1 < x < 0$ esetében a törtrészfüggvény grafikonja szigorúan monoton növekvő (nagyobb intervallumbeli számnak nagyobb a törtrésze), az abszolútérték-függvény grafikonja itt szigorúan monoton csökkenő.

4 pont

Emiatt a grafikonok legfeljebb egy pontban metszik egymást.

2 pont

Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen mind az abszolútérték-, mind a törtrészfüggvény értéke ugyananynyi $\left(\frac{1}{2}\right)$. Más megoldás tehát ezen az intervallumon nem lehetséges.

3 pont

A gyökök halmaza a $[0; 1[\cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

1 pont

Összesen 16 pont

10. évfolyam

1. $ab(a - b) - ac(a + c) + bc(2a + c - b) =$
$= ab(a - b) - ac(a + c) + bc(a + c + a - b) =$

4 pont

$= (a - b)(ab + bc) + (a + c)(bc - ac) =$
$= (a + c)[b(a - b) + c(b - a)] =$

2 pont

$= (a + c)(a - b)(b - c)$.

2 pont

Összesen 8 pont

2. Legyen a két pozitív egész szám x és y, a prímszám p. A feladat szerint $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ és $x + y = p^3$.

2 pont

Ezekből $x = \frac{3y}{8}$ és $11y = 8p^3$ adódik.

2 pont

Mivel p prímszám, $p = 11$, így $y = 8 \cdot 11^2$ és $x = 3 \cdot 11^2$ lehet csak.

6 pont

Ezek nyilván megoldások.

2 pont

Összesen 12 pont

3. Az adott szárszög P csúcsából kiindulva az egyik száron tetszőleges x hosszúságú PQ, a másik száron $2x$ hosszúságú PR szakaszt veszünk fel.

4 pont

Az RQ egyenesre R-ből kiindulva, Q irányában felmérjük az adott hosszúságú RF súlyvonalat. Az F ponton át PQ-val párhuzamos egyenes a PR egyenesen kijelöli a keresett RXY háromszög X csúcsát, az XF egyenesen az F-et tartalmazó $XY = XR$ hosszúságú szakasz pedig az Y csúcsot.

3 pont

A szerkesztés helyessége $PQR_\triangle \sim XFR_\triangle$ miatt nyilvánvaló.

3 pont

A szerkesztés minden szóba jövő (a szárszög nagysága pozitív és 180°-nál kisebb, a súlyvonal hossza pozitív) adattal elvégezhető.

2 pont

Összesen 12 pont

4. Bebizonyítjuk, hogy az x és y pozitív egész számokra, ha $x^2 + y^2$ osztható 3-mal, akkor x is és y is osztható 3-mal, így $x^2 + y^2$ osztható 9-cel.

4 pont

Ha x és y egyike osztható lenne 3-mal, a másik nem, akkor $x^2 + y^2$ nem osztható 3-mal, tehát ez nem állhat fenn.

4 pont

Ha egy pozitív egész szám nem osztható 3-mal, akkor a maradék 1 vagy 2, így négyzetének maradéka 1. Tehát ha x és y egyike sem osztható 3-mal, akkor $x^2 + y^2$ nem osztható 3-mal, így ez sem állhat fenn.

4 pont

Összesen 12 pont

5. Legyen az oldalak hossza a, b, c, és a hozzájuk tartozó magasságok hossza m_a, m_b, m_c. A feladat szerint

$$(m_a + m_b) : (m_b + m_c) : (m_c + m_a) = 5 : 7 : 8.$$

1 pont

Ebből egyrészt $(m_a + m_b) : (m_b + m_c) = 5 : 7$, azaz $5m_c = 7m_a + 2m_b$.

2 pont

Másrészt $(m_b + m_c) : (m_c + m_a) = 7 : 8$, azaz $7m_a = 8m_b + m_c$.

2 pont

Tehát az $\frac{m_b}{m_a} = x$, $\frac{m_c}{m_a} = y$, jelöléssel $5y - 2x = 7$ és $8x + y = 7$. *3 pont*

Amiből $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{3}$. *2 pont*

Tehát $m_a : m_b : m_c = 3 : 2 : 5$. *2 pont*

Mivel $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, *2 pont*

ezért $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{5} = 10 : 15 : 6$. *2 pont*

Összesen 16 pont

11. évfolyam

1. Az egyenlőtlenséget átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (a^2 - 2ad + d^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (b^2 - 2bd + d^2) + (c^2 - 2cd + d^2) \geq 0,$$

ami ekvivalens az eredeti egyenlőtlenséggel.

4 pont

Ez viszont ekvivalens az

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel, ami nyilvánvalóan igaz.

3 pont

Mivel a fenti összeg minden tagja nemnegatív, így egyenlőség csak $a = b = c = d$ esetén lehet.

1 pont

Összesen 8 pont

2. Nyilvánvaló, hogy

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4) + 4\sqrt{x-4} + 4} = x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4} + 2\right)^2} = x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4} + 2\right| = x - 3.$$

5 pont

Mivel $\sqrt{x-4} + 2 > 0$, ezért az abszolút érték elhagyható, így egyenletünk ekvivalens az

$$\sqrt{x-4} + 2 = x - 3$$

egyenlettel, amiből négyzetreemeléssel

$$x - 4 = x^2 - 10x + 25$$

adódik.

3 pont

Megoldva a másodfokú egyenletet, és ellenőrizve a gyököket, az egyetlen megoldás

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{5}}{2}.$$

2 pont

Összesen 10 pont

3. Ha n páros, akkor $n = 2k$ és $5^n - 3^n = 25^k - 9^k$.

2 pont

De

$$25^k - 9^k =$$
$$= (25-9)(25^{k-1} + 25^{k-2} \cdot 9 + \ldots + 9^{k-1}),$$

ami osztható 16-tal, azaz osztható 4-gyel is. Így $(n+1)(5^n - 3^n)$ is osztható 4-gyel.

4 pont

Ha n páratlan, akkor $n+1$ páros.

2 pont

Másrészt

$$5^n - 3^n =$$
$$= (5-3)(5^{n-1} + 5^{n-2} \cdot 3 + \ldots + 3^{n-1}),$$

tehát $5^n - 3^n$ szintén páros.

2 pont

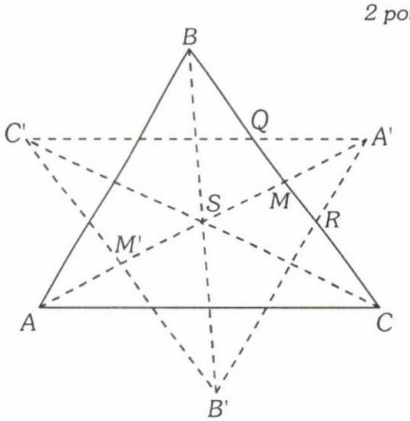
Mivel $(n+1)$ is, és $(5^n - 3^n)$ is páros, ezért $(n+1)(5^n - 3^n)$ osztható 4-gyel.

2 pont

Összesen 12 pont

4. Készítsünk ábrát a feladatban adott jelölésekkel. Legyen továbbá M a BC szakasz felezőpontja, M' pedig M-nek S-re vonatkozó tükörképe. Mivel M illeszkedik BC-re, így M' illeszkedik $B'C'$-re. Jelölje Q, illetve R a BC metszéspontját az $A'C'$-vel, illetve az $A'B'$-vel.

2 pont



Mivel $BC \parallel B'C'$, ezért $A'RQ_\triangle \sim A'B'C'_\triangle$.

2 pont

Mivel $M'S = MS = \frac{1}{3}AM$, továbbá $A'M =$

$= AM' = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}A'M'$, ezért a hasonlósági arány $\frac{1}{3}$.

2 pont

Ezért $T_{A'RQ} = \frac{1}{9}T_{A'B'C'} = \frac{1}{9}T_{ABC}$. Hasonlóan a B' és C' csúcsú kis háromszögek területe is $\frac{1}{9}T_{ABC}$.

2 pont

Így a kérdéses síkidom területe

$$T = T_{ABC} + 3 \cdot \frac{1}{9}T_{ABC} = \frac{4}{3}T_{ABC}.$$

2 pont

A Heron-képlet segítségével adódik, hogy

$$T_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84.$$

Így a keresett terület $T = 112$.

4 pont

Összesen 14 pont

5. Helyettesítsünk x helyére $\frac{3x+1}{x-3}$-et. Ekkor az egyenletből adódik, hogy

$$f(x) = 2f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) + 3, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

10 pont

Ez az eredeti egyenlettel együtt egy egyenletrendszert alkot, ami

$$f(x) = 2(2f(x) + 3) + 3, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\},$$

azaz $f(x) = -3$ adódik minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ esetén.

6 pont

Összesen 16 pont

12. évfolyam

1. A 3 év alatt 10%-os kamatos kamat mellett pénzünk felnövekedett értéke: $4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1^3$ Ft. A változó kamatozás mellett a felnövekedett érték:

$$4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1\left(1 + \frac{10+p}{100}\right)\left(1 + \frac{10+2p}{100}\right) \text{ Ft.}$$

Legyen $\frac{p}{100} = q$. A feltételek szerint

$$4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1^3 =$$
$$= 4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1(1{,}1+q)(1{,}1+2q) - 293\,920,$$

azaz $2q^2 + 3{,}3q - 0{,}0668 = 0$.

Csak a $q_1 = 0{,}02$ gyök jöhet számításba, mert a másik gyök negatív.
A 2. évben 2%-os, a 4. évben 4%-os volt a kamatlábemelés.

2. Könnyű belátni, hogy a vizsgált pontok koordinátái:

$$A(u; v), B(v; u),$$
$$C(-v; u), D(-v; -u), E(v; -u).$$

Az $ABCDE$ ötszög szétbontható a $BCDE$ téglalapra és az ABE háromszögre, azok területei:

$$T_{BCDE} = 2u \cdot 2v,$$

$$T_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 2u(u - v) = u^2 - uv.$$

Így $T_{ABCDE} = 4uv + u^2 - uv = u(3v + u) = 451 = 11 \cdot 41$.
Mivel u és v egész számok, és $0 < v < u$, ebből $u = 11$ és $v = 10$.
Tehát $A(11; 10)$, $B(10; 11)$, $C(-10; 11)$, $D(-10; -11)$, $E(10; -11)$.

3. Legyen e-nek AB-vel való metszéspontja E, AC-vel való metszéspontja F. A szögek egyenlősége miatt $ABC_\triangle \sim AEF_\triangle$.
Ha a hasonlóság aránya q, akkor a területek aránya $q^2 = \frac{1}{2}$, így $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A kerületek:

$$k_{ABC} = a + b + c, \quad k_{EFA} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b + c),$$

$$k_{EBCF} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b + c).$$

A feltétel miatt

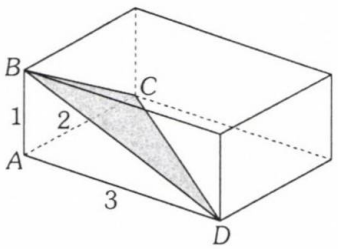
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b + c) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b + c),$$

amiből a bizonyítandó összefüggés következik.

Megjegyzés. Ilyen háromszög létezik, pl. $a = \sqrt{2} - 1$, $b = c = \frac{1}{2}$.

4. Ábrát készítünk, majd felhasználjuk az ábra jelöléseit.
A csúcsok betűzése alapján: $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$.

1 pont



Pitagorasz tételének felhasználásával kapjuk, hogy $BC = \sqrt{5}$, $DC = \sqrt{13}$, $BD = \sqrt{10}$.

3 pont

Kétféleképpen számoljuk ki az $ABCD$ derékszögű tetraéder térfogatát:

a) $V_{ABCD} = \frac{T_{ABC} \cdot 3}{3} = 1;$

b) $V_{ABCD} = \frac{T_{BCD} \cdot m}{3}.$

3 pont

A BCD háromszög minden oldalának hosszát ismerjük, így területét a Heron képlet segítségével kiszámoljuk:

$$T_{BCD} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \sim 3{,}5.$$

4 pont

Így $m \sim \frac{3}{3{,}5} \sim 0{,}857.$

2 pont

Összesen 13 pont

5. Egy számtani sorozat n-edik tagja $pn + q$ $(n \in \mathbb{N})$ alakba írható.

1 pont

Ezért a két számtani sorozat megfelelő tagjait összeszorozva az n másodfokú kifejezését kapjuk, tehát $c_n = an^2 + bn + c$.

2 pont

Így $c_0 = c = 1440$, $c_1 = a + b + c = 1716$, $c_2 = 4a + 2b + c = 1848$.

3 pont

Ebből $a + b = 276$, $2a + b = 204$, így $a = -72$, $b = 348$.

4 pont

Tehát $c_n = -72n^2 + 348n + 1440$,

2 pont

$c_7 = 348$.

2 pont

Összesen 14 pont

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2005. november 30.

Feladatok (280–284.)

280. Az x, y, z pozitív valós számokra teljesül, hogy $\frac{1}{3} \le xy + yz + zx \le 3$. Határozzuk meg az $x \cdot y \cdot z$ kifejezés értékkészletét!

281. Mutassuk meg, hogy ha x és y olyan pozitív egészek, amelyekre $2xy$ osztója az $x^2 + y^2 - x$-nek, akkor x négyzetszám!

282. Jelölje a, b, c egy háromszög oldalait, s a félkerületét, R a köré írt, r a beírt kör sugarát. Igazoljuk, hogy

$$\frac{r}{R} \le \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4srR}}{4s} \le$$

$$\le \frac{a}{3a+2s} + \frac{b}{3b+2s} + \frac{c}{3c+2s} \le \frac{1}{2} \le \frac{R}{4r}!$$

(A sugáregyenlőtlenség élesítése.)

Bencze Mihály, Brassó

283. Az $\{a_n\}$ egészekből álló sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, és $-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} < \frac{1}{2}$, ha $n \ge 2$. Bizonyítsuk be, hogy a_n minden 1-nél nagyobb pozitív egész n esetén páratlan!

284. Melyek azok az n pozitív egészek, amelyekre a tetszőleges n oldalú konvex sokszög $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ belső szögeire fennáll az

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_n\alpha_1 \le \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2}{n}$$

egyenlőtlenség?

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (265–269. feladatok)

265. Mely pozitív egész n számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2}} < 1 - \frac{1}{n}$$

Megoldás: $n = 1$, 2, 3 esetén nem teljesül az egyenlőtlenség, $n =$ 4-re viszont már igen. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala n-nek szigorúan csökkenő, jobb oldala szigorúan növekvő függvénye, ezért minden 4-nél nem kisebb pozitív egész kielégíti az egyenlőtlenséget.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

266. Számítsuk ki S értékét, ha

$$S=\left[\frac{2^{2006}+1}{2^{2004}+1}\right]+\left[\frac{3^{2006}+1}{3^{2004}+1}\right]+\ldots+\left[\frac{2005^{2006}+1}{2005^{2004}+1}\right].$$

([x] az x-nél nem nagyobb, legnagyobb egész számot jelöli.)

Megoldás: Legyen k olyan pozitív egész, amelyre $2 \le k \le 2005$. Vizsgáljuk az összeg általános tagját.

$$\left[\frac{k^{2006}+1}{k^{2004}+1}\right]=\left[\frac{k^2(k^{2004}+1)-k^2+1}{k^{2004}+1}\right]=$$

$$=\left[k^2-\frac{k^2-1}{k^{2004}+1}\right]=k^2-1$$

Így

$$S=(2^2-1)+(3^2-1)+\ldots+(2005^2-1)=$$
$$=2^2+3^2+\ldots+2005^2-2004=$$
$$=1^2+2^2+\ldots+2005^2-2005=$$
$$=\frac{2005\cdot 2006\cdot 4011}{6}-2005=2688725050.$$

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 12.

267. x, y és z olyan pozitív valós számok, amelyekre $xyz(x+y+z)=1$. Határozzuk meg az $(x+y)(y+z)$ minimumát!

I. megoldás: Alakítsuk a kérdéses szorzatot a feltétel alapján:

$$(x+y)(y+z)=y(x+y+z)+xz=\frac{1}{xz}+xz\ge 2,$$

ahol az egyenlőtlenség a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből adódik. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $xz=1$. A kérdéses kifejezés minimuma tehát 2, ha vannak olyan x, y, z pozitív valós számok, melyekre $xyz(x+y+z)=1$ és $xz=1$.

A továbbiakban megadjuk a minimum értékhez tartozó összes megfelelő pozitív valós számhármast.

Legyen $x=p$. Ekkor $z=\frac{1}{p}$, és így a feladat feltételének átalakításával

$$y^2+\left(p+\frac{1}{p}\right)y-1=0.$$

Ennek az egyenletnek a pozitív megoldása:

$$y=\frac{\sqrt{\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+4}-\left(p+\frac{1}{p}\right)}{2}.$$

A kifejezés minimuma tehát 2, ezt az értéket pontosan a most megadott helyeken veszi fel.

Dályay Pál Péter, Szeged
Szoldatics József, Kapuvár

II. megoldás: Tetszőleges (x, y, z) pozitív valós számhármashoz rendeljük hozzá az (a, b, c) számhármast a következőképpen: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$. Könnyen látható, hogy a, b, c pozitív valósak, és bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál, azaz felfoghatók egy háromszög oldalainak. Az is könnyen bizonyítható, hogy hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű.

A tekintett háromszög kerületének fele $s=\frac{a+b+c}{2}$, amivel $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$. Ezzel felírva a feltételt: $xyz(x+y+z)=$ $=(s-a)(s-b)(s-c)s=1$. Ez pedig a Héron-képlet alapján azt jelenti, hogy a feltételnek megfelelő összes hozzárendelt háromszög területe 1. Ezen háromszögekre kell az ab szorzat minimumát megadni.

Ha T jelöli a háromszög területét és γ az a és b hosszúságú oldalak szögét, akkor az ismert területképlet alapján $ab=\frac{2T}{\sin\gamma}=\frac{2}{\sin\gamma}\ge 2$, mivel $0<\sin\gamma\le 1$.

A kifejezés minimuma tehát 2, ezt azon hozzárendelt háromszögekre veszi fel, amelyeknek az a és b hosszúságú oldala derékszöget zár be.

Zachar Zoltán, Tatabánya

A megoldók száma: 11.

268. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan páronként különböző pozitív egészekből álló $(x; y; u; v)$ számnégyes létezik, amely kielégíti a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x^{2004} + y^{2005} &= u^2 \\ x^{2005} + y^{2004} &= v^{2004} \end{aligned}\right\}$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Azt látjuk be, hogy páros n $(n \geq 2)$ esetén az

$$x^n + y^{n+1} = u^2 \qquad (1)$$

$$x^{n+1} + y^n = v^n \qquad (2)$$

egyenletrendszernek végtelen sok olyan pozitív egészekből álló $(x; y; u; v)$ számnégyes tesz eleget, amelyre $x < y < v < u$ teljesül. Ebből $n = 2004$ esetén a feladat állítását kapjuk.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ha a és b az $1 < a < b$ feltételnek megfelelő tetszőleges pozitív egészek, akkor az $x = b^{2n} - a^{2n}$, $y = a^2(b^{2n} - a^{2n})$, $z = b^2(b^{2n} - a^{2n})$ számhármas (2)-t kielégíti:

$$x^{n+1} + y^n = (b^{2n} - a^{2n})^{n+1} + [a^2(b^{2n} - a^{2n})]^n =$$
$$= (b^{2n} - a^{2n})^n \cdot b^{2n} = [(b^{2n} - a^{2n})b^2]^n = v^n,$$

továbbá nyilvánvaló, hogy $x < y < v$.

Ezután belátjuk, hogy végtelen sok megfelelő a és b esetén $x^n + y^{n+1}$ négyzetszám lesz, azaz (1) is teljesül.

$$x^n + y^{n+1} = (b^{2n} - a^{2n})^n + [a^2(b^{2n} - a^{2n})]^{n+1} =$$
$$= (b^{2n} - a^{2n})[(1 + a^{2n+2}(b^{2n} - a^{2n})]. \qquad (3)$$

Ennek a szorzatnak az első tényezője négyzetszám, hiszen n páros. Ahhoz, hogy (1) teljesüljön a második tényező is négyzetszám kell, hogy legyen.

$$1 + a^{2n+2}(b^{2n} - a^{2n}) = a^{2n+2}b^{2n} + 1 - a^{4n+2} =$$
$$= (a^{n+1}b^n - 1)^2 + 2a^{n+1}b^n - a^{4n+2}.$$

Ez biztosan négyzetszám, ha $2a^{n+1}b^n - a^{4n+2} = 0$, azaz

$$2b^n = a^{3n+1}. \qquad (4)$$

Könnyű belátni, hogy tetszőleges k pozitív egész szám esetén az $a = 2^{n+1}k^n$ és $b = 2^{3n+4}k^{3n+1}$ számok igazzá teszik a (4) egyenletet:

$$2b^n = 2(2^{3n+4}k^{3n+1})^n = 2^{3n^2+4n+1}k^{n(3n+1)} =$$
$$= 2^{(n+1)(3n+1)}k^{n(3n+1)} = (2^{n+1}k^n)^{3n+1} = a^{3n+1}.$$

Tehát ha a-t és b-t a fenti módon választjuk, akkor (3)-ban a második tényező teljes négyzet, így

$$x^n + y^{n+1} = (b^{2n} - a^{2n})^n \cdot (a^{n+1}b^n - 1)^2 =$$
$$= \left[(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n}{2}} \cdot (a^{n+1}b^n - 1)\right]^2,$$

ahonnan $u = (b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n}{2}} \cdot (a^{n+1}b^n - 1)$.

Összefoglalva: Ha n rögzített pozitív páros egész szám, akkor tetszőleges k pozitív egész szám esetén az $a_k = 2^{n+1}k^n$ és $b_k = 2^{3n+4}k^{3n+1}$ számok segítségével előállított $x_k = b_k^{2n} - a_k^{2n}$, $y_k = a_k^2\left(b_k^{2n} - a_k^{2n}\right)$, $v_k = b_k^2\left(b_k^{2n} - a_k^{2n}\right)$ és $u_k = \left(b_k^{2n} - a_k^{2n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(a_k^{n+1}b_k^n - 1\right)$ számnégyes $(k \in \mathbb{N}^+)$ az egyenletrendszer végtelen sok megoldását adja. Mivel $u_k > v_k$, ezért a számnégyes tagjai páronként különbözőek.

Kiss Zoltán, Pécs

A megoldók száma: 5.

269. Adjuk meg mindazokat az $f: Q \to Q$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely racionális x és y esetén $f(x + f(y)) = f(x) \cdot f(y)$.

Megoldás:

1. eset: Tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in Q$, hogy $f(a) = 0$. Ekkor tetszőleges $x \in Q$ esetén $f(x + f(a)) = f(x)f(a)$, ahonnan $f(x) = 0$, vagyis az azonosan 0 függvény megfelel a feltételnek.

2. eset: Tegyük fel most, hogy f egyetlen racionális helyen sem 0, és legyen $f(0) = a$ $(\neq 0)$.

1. helyettesítés: $x = -a$, $y = 0$. Ekkor $f(-a + f(0)) = f(-a)f(0)$, ahonnan $f(-a) = 1$.

2. helyettesítés: $x \in Q$ tetszőleges, $y = -a$. Ekkor $f(x + f(-a)) = f(x)f(-a)$. Ebből $f(x + 1) = f(x)$, az-

az f periodikus 1 periódussal. Mivel azonban $f(0) = a$, ezért minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f(k) = a$.

3. helyettesítés: $x = y = 0$. Ekkor $f(0 + f(0)) = f(0)f(0)$, ahonnan $f(a) = a^2$.

4. helyettesítés: $x = a$, $y = 0$. Ekkor $f(a + f(0)) = f(a)f(0)$. Ebből $f(2a) = a^3$.

5. helyettesítés: $x = 2a$, $y = 0$. Ekkor $f(2a + f(0)) = f(2a)f(0)$, ahonnan $f(3a) = a^4$.
Ezt folytatva kapjuk, hogy $f(na) = a^{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Legyen most $a = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prím egészek, q pozitív egész. (A feltétel szerint f racionális helyeken racionális értékeket vesz fel, tehát a biztosan ilyen alakú.) Mivel $f(qa) = a^{q+1}$ és $f(qa) = f(p) = a$, ezért $a^{q+1} = a$, ahonnan $|a| = 1$.

6. helyettesítés: Tegyük fel, hogy $a = -1$, és $x = 4$, $y = 0$. Ekkor $f(4 + f(0)) = f(4)f(0)$. Ebből a korábbiak figyelembe vételével az adódik, hogy $-1 = 1$, ami nyilvánvaló ellentmondás.
Kaptuk, hogy $a = 1$, azaz f minden egész helyen az 1 értéket veszi fel. A továbbiakban belátjuk, hogy minden racionális helyen 1-et vesz fel.
Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik olyan $b \in Q$, hogy $f(b) = c \neq 1$. (Nyilván $c \neq 0$ is teljesül.)

7. helyettesítés: $x = c$, $y = b$. Ekkor $f(c + f(b)) = f(c)f(b)$, ahonnan $f(2c) = cf(c)$.

8. helyettesítés: $x = 2c$, $y = b$. Ezzel $f(2c + f(b)) = f(2c)f(b)$, és ebből $f(3c) = c^2 f(c)$.
Ezt folytatva kapjuk, hogy $f(nc) = c^{n-1}f(c)$ minden pozitív egész n esetén.

Legyen $c = \frac{r}{s}$, ahol r és s relatív prím egészek, s pozitív egész. Ekkor, mivel $f(sc) = c^{s-1}f(c) = f(r) = 1$ és $f(2sc) = c^{2s-1}f(c) = f(2r) = 1$, ezért $c^{s-1} = c^{2s-1}$, ahonnan $|c| = 1$. Feltevésünk szerint c nem lehet 1, ezért $c = -1$.

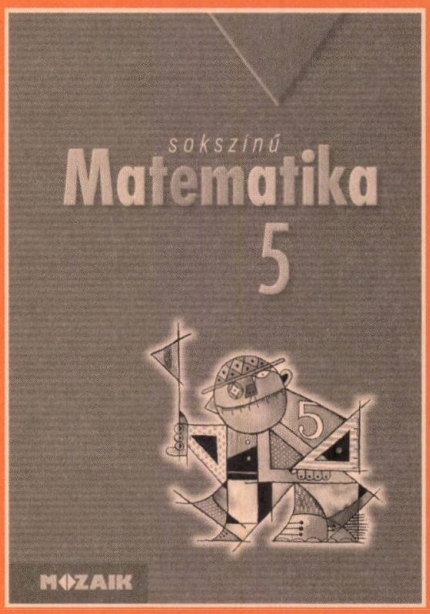
9. helyettesítés: $x \in Q$ tetszőleges, $y = b$. Ezzel $f(x + f(b)) = f(x)f(b)$, azaz $f(x - 1) = -f(x)$.
Tudjuk, hogy f periodikus, így $f(x - 1) = f(x)$ is teljesül. Ebből pedig adódik, hogy $f(x) = -f(x)$ azaz $f(x) = 0$. Ez viszont ellentmondás, ami azt jelenti, hogy nincs olyan racionális szám, ahol f nem 1-et vesz fel.
Összefoglalva: Két megfelelő függvényt találtunk, $f(x) \equiv 0$ és $f(x) \equiv 1$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 7.

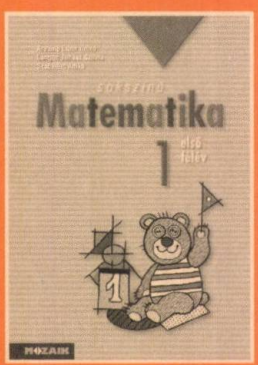
A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (265–267.); Dályay Pál Péter, Szeged (265–269.); Kamarás Lajos, Pécs (265–267., 269.); Kiss Zoltán, Pécs (265–269.); Márkus Emília, Kecskemét (265–267.); Rakonczai György, Budapest (265–267., 269.); Szoldatics József, Kapuvár (265–269.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (265–269.); Varga Éva, Kecskemét (266.); Varga István, Békéscsaba (265–267.); Zachar Zoltán, Tatabánya (265–269.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (265–267.).

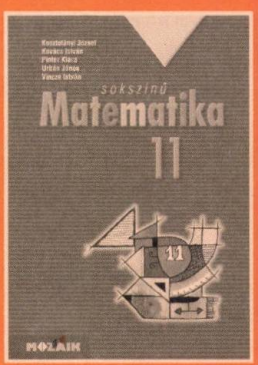
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD 1–12. OSZTÁLYOSOKNAK

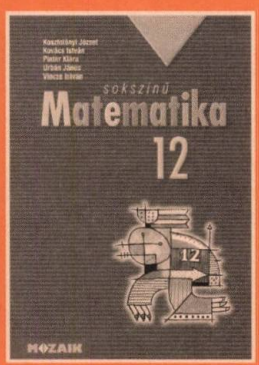


A Sokszínű matematika tankönyvcsalád gyermekközeli, játékos és gyakorlatias módon tartalmazza a kerettantervnek megfelelő tananyagot.
Az 5. osztályos tankönyv arra törekszik, hogy a matematikai gondolkodást minél változatosabban fejlessze. Ezért a „felfedeztetés" és a fogalmak kialakítása a tanulók gyakorlati tapasztalataiból indul ki.
Minden fejezetben szerepelnek a logikus gondolkodást és a kombinatorikus szemléletmódot gyakoroltató feladatok.
A könyv és a munkafüzet nemcsak tartalmában, hanem felépítésében is nagyon színes, szemléletes.

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA







MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában II.

(Mészáros József)

A Pitagorasz-tétel egy másik nem közismert általánosítása

(Dr. Darvasi Gyula)

A Stewart-tétel és alkalmazásai

(Molnár István)

A tankönyvszöveg megértése

(Dr. Előry Vilma)

XIII. ÉVFOLYAM 2005 5

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1450 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában II.
Mészáros József
tanár, Jóka

A Pitagorasz-tétel egy másik nem közismert általánosítása
Dr. Darvasi Gyula
főiskolai docens, Nyíregyháza

A Stewart-tétel és alkalmazásai
Molnár István
főiskolai tanársegéd, Békéscsaba

KÖNYVISMERTETÉS
Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek
Ambrus András
docens, Budapest

VITAINDÍTÓ
A tankönyvszöveg megértése
Dr. Előry Vilma tudományos főmunkatárs,
MTA Nyelvtudományi Intézete, Budapest

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Mészáros József

Matematikai tanulóversenyek Szlovákiában II.

Az A kategória iskolai fordulójának feladatai (MO 54. évfolyam)

A–S–1: Határozzátok meg az egész számoknak összes olyan végtelen számtani sorozatát, amelynek első tíz eleme között ott van az 1 és a 2005 is!

Megoldás: Foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy egész számú $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ számtani sorozatok esetében léteznek olyan i és j indexek: $i, j \in \{1, 2, ..., 15\}$ úgy, hogy $a_i = 1$ és $a_j = 2005$. Hangsúlyozzuk, hogy ha ilyen (i, j) indexpár létezik, akkor ez lesz az egyetlen ilyen, mert a nem konstans számtani sorozatban minden szám legfeljebb egyszer fordul elő.
Tegyük fel, hogy ilyen i és j indexek léteznek. Az a_1 első tag és a d differencia segítségével az a_i és a_j tagok kifejezhetők.

$$a_i = a_1 + (i-1) \cdot d = 1$$

és

$$a_j = a_1 + (j-1) \cdot d = 2005.$$

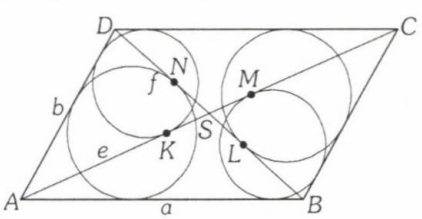
Az egyenletrendszert az ismeretlen a_1 és d-re megoldva kapjuk:

$$d = \frac{2004}{j-i} \quad \text{és} \quad a_1 = 1 - \frac{2004(i-1)}{j-i}.$$

Az a_1 és d éppen akkor lesznek egész számok, ha az $|j-i|$ természetes szám osztója 2004-nek úgy, hogy $|j-i|$ egy az 1, 2, 3, 4 és 6 számok közül (figyelembe véve az $i, j \in \{1, 2, ..., 10\}$ feltételt, amiből $|j-i| < 10$ és 2004-nek nincs más egyjegyű osztója).
Az ilyen tulajdonságú sorozatok száma az $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ halmazból kiválasztott összes olyan (i, j) indexpár, melyre érvényes: $|j-i| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Az ilyen (i, j) párok száma rendre: $2 \cdot 9$; $2 \cdot 8$; $2 \cdot 7$; $2 \cdot 6$ és $2 \cdot 4$ úgy, hogy az összes ilyen sorozatok száma: $18 + 16 + 14 + 12 + 8 = 68$.

A–S–2: Az $ABCD$ paralelogrammában fennáll, hogy $|AB| > |BC|$. Írjunk köröket az ACD, BCD, ABC és ABD háromszögekbe, és ezek érintési pontjait az AC, ill. BD átlókkal jelöljék rendre a K, L, M és N pontok. Bizonyítsátok be, hogy $KLMN$ téglalap!

Megoldás: A paralelogramma az AC és BD átlók S metszéspontjára középpontosan tükrös, következésképpen az ACD és CAB háromszögek is középpontosan szimmetrikusak lesznek, s velük együtt beírt köreik is, és a K és M érintési pontok is. Ugyanez a megállapítás érvényes az L és N pontokra is. Arra a megállapításra jutottunk, hogy a $KLMN$ négyszög paralelogramma.



A $K = M = S$ vagy az $L = N = S$ egyenlőséget az $|AB| > |BC|$ feltétel kizárja, amely egyben azt is biztosítja, hogy az említett háromszögek nem lesznek egyenlő szárúak AC, ill. BD alappal, tehát a beírt körök nem az alapok középpontjában érintik egymást.
Ahhoz, hogy $KLMN$ paralelogramma téglalap legyen, bizonyítani kell a $KM = NL$ egyenlőséget. Vezessük be az $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ és $f = |BD|$ jelöléseket.

Ekkor felírható: $|AK| = \frac{e+b-a}{2} = |CM|$ és

$|BL| = \frac{f+b-a}{2} = |DN|$ összefüggés.

Az $|AK| < \frac{e}{2} = |AS|$ egyenlőtlenség az $a > b$ feltételből adódik úgy, hogy K az A és S pontok között fekszik, és az S ponttól való távolsága $|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e+b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Hasonlóan adódik, hogy az L, M, N pontok rendre a BS, CS, DS szakaszokon fekszenek, és érvényesek az $|LS| = |MS| = |NS| = \frac{a-b}{2}$ egyenlőségek.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $KLMN$ négyszög téglalap. (Ha négyzet lenne, érvényesnek kellene lennie, hogy $KM \perp LN$, tehát $AC \perp BD$, ami ellentmond az $a \neq b$ feltételnek.)

A–S–3: Határozzátok meg, hogy mely k természetes számokra lesz a

$$k \cdot (k-2) \leq \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot x \leq k^2 \cdot (k+3)$$

egyenlőtlenségnek x-re pontosan $(k+1)^2$ megoldása az egész számok halmazában.

Megoldás: Osszuk el az egyenlőtlenséget $k + \frac{1}{k}$-val, így az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leq x \leq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \qquad (1)$$

$k = 1$-re az egyenlőtlenség $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ alakot vesz fel, amelynek az egész számok halmazában pontosan három megoldása van, ami kevesebb, mint $(1+1)^2 = 4$. A $k = 1$-re nincs megoldás.

A $k = 2$ és $k = 3$ értékek megfelelnek. Megpróbáljuk belátni, hogy a $k = 1$-en kívül a többi természetes szám megfelel.

Nézzük az egyenlőtlenség bal és jobb oldalát.

$(k^3 - 2k^2) : (k^2 + 1) = k - 2$,
a maradék: $-k + 2$.
$(k^4 + 3k^3) : (k^2 + 1) = k^2 + 3k - 1$,
a maradék: $-3k + 1$.

Helyettesítsük be ezt (1)-be:

$$k - 2 - \frac{k-2}{k^2+1} \leq x \leq k^2 + 3k - 1 - \frac{3k-1}{k^2+1}. \qquad (2)$$

Ha a „maradékokra" érvényes lesz, hogy

$$0 \leq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \text{ és } 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leq 1, \qquad (3)$$

akkor az (1) egyenlőtlenségnek éppen azok az x egész számok a megoldásai, amelyekre érvényes: $k - 2 \leq x \leq k^2 + 3k - 2$. Az ilyen x-ek száma: $(k^2 + 3k - 2) - (k - 2) + 1 = (k+1)^2$, amit kerestünk. Könnyen belátható, hogy a (3) minden $k \geq 2$-re érvényes. Ekkor ugyanis $0 \leq k - 2 < k + 1 < k^2 + 1$, ahonnan (3) bal oldala következik. A (3) jobb oldala minden $k \geq 3$-ra evidens (mert ekkor $0 < 3k - 1 \leq k^2 - 1 < k^2 + 1$); $k = 2$ esetében érvényes: $3k - 1 = 5 = k^2 + 1$. A megoldás: minden 1-nél nagyobb természetes szám.

A kerületi verseny feladatai
A-kategória

A–II–1: Ha az a, b, c pozitív valós számok szorzata 1, érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Bizonyítsátok be, és állapítsátok meg, mikor áll fenn egyenlőség!

Megoldás: $4(a+1)(b+1)(c+1)$-gyel való szorzás és fokozatos ekvivalens átalakítások után kapjuk:

$$4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) \geq$$
$$\geq 3(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$4(ac+a) + 4(ab+b) + 4(bc+c) \geq$$
$$\geq 3(ab+a+b+1)(c+1)$$
$$4(ab+ac+bc+a+b+c) \geq$$
$$\geq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1)$$
$$ab+ac+bc+a+b+c \geq 3(abc+1).$$

Mivel $abc = 1$, ezért ezt a jobb oldalba helyettesítve kapjuk

$$ab + ac + bc + a + b + c \geq 6.$$

Ha a bal oldalba az $ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$, $bc = \frac{1}{a}$ kifejezéseket helyettesítjük, kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6,$$

amely érvényes, mert a zárójelben lévő kifejezések mindegyike legalább 2. Minden $k > 0$-ra érvényes a $k + \frac{1}{k} \geq 2$, amelyben $k = 1$ esetében áll fenn egyenlőség. Az eredeti egyenlőség $a = b = c = 1$ esetében áll fenn.

A–II–2: Az egész számok halmazában oldjátok meg a következő egyenletrendszert:

$$x(y + z + 1) = y^2 + z^2 - 5,$$
$$y(z + x + 1) = z^2 + x^2 - 5,$$
$$z(x + y + 1) = x^2 + y^2 - 5.$$

Megoldás: Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, fokozatos rendezéssel kapjuk:

$$(xy + xz + x) - (yz + xy + y) = y^2 + z^2 - 5 - (z^2 + x^2 - 5),$$
$$(x - y)z + x - y = (y - x)(y + x),$$
$$(x - y)(x + y + z + 1) = 0.$$

Hasonló módon kapjuk a következő egyenleteket is:

$$\text{és} \qquad \begin{aligned} (y - z)(x + y + z + 1) &= 0 \\ (x - z)(x + y + z + 1) &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Mindhárom egyenletben előfordul az $x + y + z + 1$ kifejezés. Két esetet kell ezért megkülönböztetnünk.

A) $x + y + z + 1 = 0$. Ezt felhasználva az eredeti egyenletrendszert a következőképpen írhatjuk:

$$x \cdot (-x) = y^2 + z^2 - 5,$$
$$y \cdot (-y) = z^2 + x^2 - 5,$$
$$z \cdot (-z) = x^2 + y^2 - 5.$$

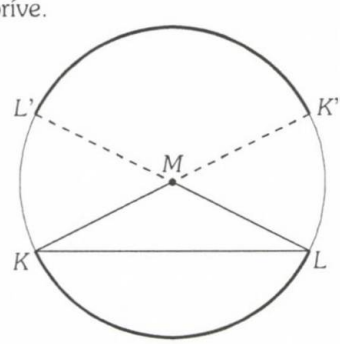
Látható, hogy az egyenletrendszer egyetlen egyenlettel, az $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ egyenlettel ekvivalens, amelynek (tekintettel a négyzetszámok nemnegatív voltára) az egész számok halmazában az (x^2, y^2, z^2) megoldása (eltekintve a sorrendtől) (4, 1, 0) úgy, hogy (x, y, z) a $(\pm 2, \pm 1, 0)$ számhármas permutációja lesz. A számok előjele az $x + y + z + 1 = 0$ feltételből könnyen meghatározható.
Egyetlen számhármas, a (–2, 1, 0) és annak permutációja felel meg. Ebben az esetben az egyenletrendszer hat megoldását kapjuk.

B) Legyen $x + y + z + 1 \neq 0$. Az (1) egyenletrendszerből $x = y = z$ adódik. Az adott egyenletrendszer ekvivalens az $x \cdot (2x + 1) = 2x^2 - 5$ egyenlettel, amelyet csak az $x = -5$ elégíti ki.

Az egyenletrendszernek összesen hét megoldása van: a (–5; –5; –5) és a (–2; 1; 0) rendezett számhármas összes permutációja.

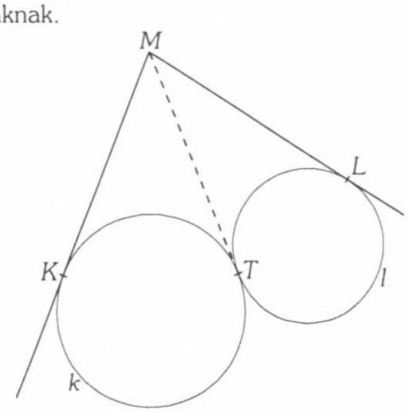
A–II–3: A síkban adott a KL alapú egyenlő szárú KLM háromszög. Vizsgáljunk két tetszőleges k és l körvonalat, amelyeknek külső érintkezése van, és amelyek a KM és LM egyeneseket rendre a K és L pontokban érintik. Határozzátok meg az összes ilyen k és l körvonalak T érintési pontjainak halmazát.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely a K és L pontok, továbbá az $m(M; |MK|)$ körvonal rövidebbik KL köríve, valamint KL-nek az M-re középpontosan tükrös $K'L'$ köríve.



1. ábra

Először bebizonyítjuk, hogy az MT egyenes (2. ábra) (belső) közös érintője a k és l körvonalaknak.



2. ábra

Tegyük fel, hogy az MT egyenes a k körvonalat a T, T_1 pontokban metszi, az l körvonalat a T, T_2 pontokban. Írjuk fel az M pont hatványát mindkét körvonalra (az M pont a k és l körvo-

nalak belső tartományán kívül van, hiszen az érintő pontja):

$$|MT|\cdot|MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT|\cdot|MT_2|,$$

ahonnan

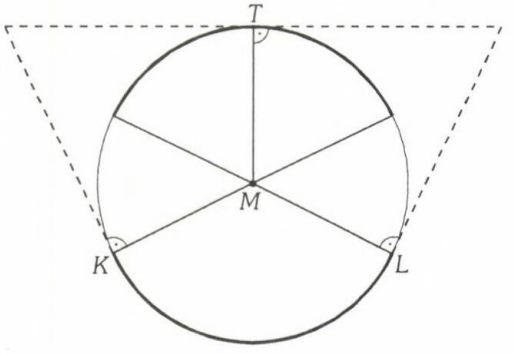
$$|MT_1| = |MT_2|.$$

Mivel a T_1 és T_2 pontok is az MT félegyenes pontjai, ezért $T_1 = T_2$. A k és l körvonalaknak egyetlen közös érintési pontja van, a T, következésképpen $T_1 = T_2 = T$. Ezért MT a két körvonal közös érintője, és ezen felül $|MT| = |MK| = |ML|$, a T pont tehát az $m(M; |MK|)$ körvonalon fekszik.

Az MT egyenes a két körvonalat elválasztja egymástól, tehát a K és L pontok az MT határegyenessel meghatározott különböző félsíkokban fekszenek.

Az MT egyenes a KLM háromszög KL oldalát metszi, ezért a T pont az m körvonal két rövidebb KL és $K'L'$ köríveken fekszik.

Fordítva: ha T az említett két körív valamelyikének tetszőleges belső pontja (3. ábra), a KMT és LMT konvex szögek az MT közös szárral meghatározott ellentétes félsíkokban fekszenek. Az $|MK| = |MT|$ és $|ML| = |MT|$ egyenlőségekből következik, hogy az említett szögekbe körök írhatók úgy, hogy a szögek megfelelő szárait K és T, ill. L és T pontokban érintsék. Ezek a k és l megfelelő körvonalak a T érintési ponttal.



3. ábra

Ha $T = K$, akkor tetszőleges k körvonal megfelel, az MK egyenest K pontban érintő és MKL' félsíkban fekvő, valamint az l körvonal, amely a KML szög szárait K és L pontokban érinti (ez a körvonal egyértelműen meghatározott). Hasonlóan szerkesztjük a k és l körvonalakat $T = L$ esetében. A K' és L' pontok a keresett ponthalmazba nem tartozhatnak, mivel K' a tetszőleges k körvonalhoz húzott KM érintőn fekszik, és hasonlóan L' a tetszőleges l körvonal LM érintőjén.

A–II–4: Határozzátok meg az összes olyan természetes számpárt, melyeknek összege a 3-as számjegyre végződik, különbségük prímszám, szorzatuk pedig egy természetes szám négyzete!

Megoldás: Jelölje a két természetes számot x és y, az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $x > y$.

Mivel $x - y = p$ prímszám, és az x, y számok d legnagyobb közös osztójára fennáll, hogy $d \mid (x - y)$ vagyis $d \mid p$, ezért $d = p$ vagy $d = 1$.

Ha $d = p$ lenne, akkor azt kapnánk, hogy $y = k \cdot p$ és $x = y + p = (k+1) \cdot p$ alkalmas k természetes szám esetén úgy, hogy szorzatuk $x \cdot y = k \cdot (k+1) \cdot p^2$, ez azonban nem lehet sohasem négyzetszám, hiszen $k(k+1)$ két szomszédos négyzetszám között fekszik, hiszen $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$.

Ezért szükségképpen $d = 1$ úgy, hogy x és y relatív prímek. Szorzatuk csak abban az esetben lehet négyzetszám, ha külön-külön is négyzetszámok, tehát $x = u^2$ és $y = v^2$, ahol u, v alkalmas természetes számok, miközben $u > v$, ahonnan $p = x - y = (u - v) \cdot (u + v)$. A törzsszám ilyetén való felbontásának egyetlen módja az, ha $u - v = 1$ és $u + v = p$. Innen már egyszerűen adódnak az $u = \frac{p+1}{2}$ és $v = \frac{p-1}{2}$ egyenletek, ahonnan az s összegüket így fejezhetjük ki: $s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}$.

Az s összeg a feladat szövege szerint 3-as számjegyre végződik, a $2s$ pedig 6-os számjegyre végződik, vagyis $p^2 + 1$ hatra végződik. Ezért p^2-nek 5-re kell végződnie, p tehát 5 többszöröse, ami $p = 5$ esetében teljesül. Ezt az értéket behelyettesítve a levezetett képletekbe $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ és $y = 4$ adódik. A próba kézenfekvő: $9 - 4 = 5$; $9 + 4 = 13$ és $9 \cdot 4 = 6^2$. A feladat feltételeit a 9 és 4 számkettős elégíti ki.

Iskolai forduló
B-kategória

B–S–1: Az asztalon 54 kupac kavics fekszik, 1, 2, 3, ..., 54 darab kaviccsal a kupacokban. Egy-egy lépésben kiválasztunk tetszőlegesen k számú kavicsot tartalmazó kupacot, elvesszük, majd minden legalább $k + 1$ kavicsot tartalmazó kupacból k számú kavicsot elveszünk. Például, ha első lépésben az 52 kavicsot tartalmazó kupacot vesszük el, akkor az asztalon az 1, 2, 3, ..., 51, 1 és 2 kavicsot tartalmazó kupacok maradnak.
Tételezzük fel, hogy néhány lépés után az asztalon egyetlen kupac kavics marad. Indokoljátok, mennyi kavics lehet benne!

Megoldás: Ha minden lépésben rendre 54, 53, 52, ... kupacokat vesszük el, akkor az utolsó kupacban egyetlen kavics marad.
Bebizonyítjuk, hogy bármelyik kupaccal kezdünk és bármilyen legyen is a sorrend, az utolsó kupacban mindig egy kavics lesz.
Megmutatjuk ugyanis, hogy minden lépés után, melyet követően az asztalon legalább egy kupac marad, a kupacban lévő kavicsszám $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazt alkot, ahol n természetes számot jelöl (nem zárjuk ki, hogy némely kupacokban lehetnek egyenlő számú kavicsok).
Ez azt is jelenti, hogy az asztalon mindig legalább egy kupac lesz éppen 1 darab kaviccsal.
Kezdetben van az $\{1, 2, 3, ..., 54\}$ halmaz. Tegyük fel, hogy bizonyos számú lépés után az egyes kupacokban levő kavicsszámok halmaza $\{1, 2, ..., n\}$ $(n \geq 2)$. Ha most az n számú kavicsot tartalmazó halmazt vesszük el, vagy amiben 1 db kavics van, akkor az $\{1, 2, ..., n-1\}$ halmaz marad. Ha az m számú kavicsot tartalmazó halmazt választjuk, ahol $m \notin \{1, 2\}$, akkor a kavicsok számának halmaza $\{1, 2, ..., m-1\} \cup \{1, 2, ..., n-m\} = \{1, 2, 3, ..., p\}$, ahol $p = \max\{m-1; n-m\}$.

B–S–2: Legyenek az ABC derékszögű háromszög oldalai $a < b < c$. Jelölje Q a BC befogó felezőpontját, S pedig az AB átfogó felezőpontját. Az AB szakasz felezőmerőlegese a CA befogót az R pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az $|RQ| = |RS|$ egyenlőség éppen akkor teljesül, ha $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$!

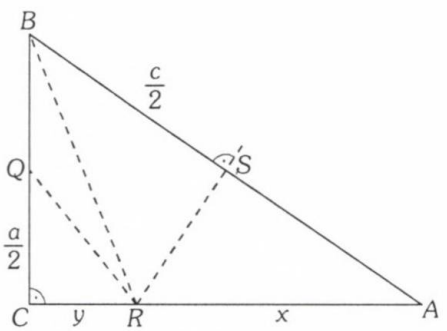
Megoldás: Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk $|BR|^2 = a^2 + y^2$ a $CRB_{\triangle}$-ből, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2$ a $BRS_{\triangle}$-ből.

$$|RS|^2 = a^2 + y^2 - \frac{c^2}{4}. \qquad (1)$$

Alkalmazzuk most Pitagorasz tételét a $QCR_{\triangle}$-re:

$$|RQ|^2 = \frac{a^2}{4} + y^2. \qquad (2)$$

Az $|RS| = |RQ|$ egyenlőség éppen akkor teljesül, ha (1) = (2), azaz $a^2 + y^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} + y^2$, amiből $3a^2 = c^2$. A derékszögű háromszögben $c^2 = a^2 + b^2$, azaz a $3a^2 = c^2$ ekvivalens a $3b^2 = 2c^2$ egyenlettel, vagyis $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.



B–S–3: Az egész számok halmazában oldjátok meg az

$$\left[\frac{x}{1-x}\right] = \frac{[x]}{1-[x]}$$

egyenletet, ahol $[x]$ a legnagyobb olyan egész számot jelenti, amely nem haladja meg x-et.

Megoldás: A jobb oldalt így írhatjuk:

$$\frac{[x]}{1-[x]} = \frac{1}{1-[x]} - 1.$$

Mivel a bal oldal egész szám, ezért a jobb oldalnak is egész számnak kell lennie, ami azt jelenti, hogy $1 - [x] \in \{-1; 1\}$, azaz $[x] \in \{0; 2\}$.
Legyen $[x] = 0$. Ekkor $0 \leq x < 1$ és az adott egyenlet: $\left[\frac{x}{1-x}\right] = 0$. Ez az egyenlet éppen akkor teljesül, ha $0 \leq \frac{x}{1-x} < 1$, amit az $1 - x > 0$

egyenlőtlenséggel egybevetve a $0 \le x < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk. A megoldás: $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

Legyen most $[x] = 2$. Éppen akkor teljesül, ha $2 \le x < 3$. Az adott egyenlet $\left[\frac{x}{1-x}\right] = -2$ alakú, ami éppen akkor teljesül, ha $-2 \le \frac{x}{1-x} < -1$.

Az $x \ge 2$ feltételt figyelembe véve ($1 - x < 0$ lesz) a $-2 + 2x \ge x > -1 + x$ egyenlőtlenséghez jutunk, azaz $x \ge 2$. Ebben az esetben az $x \in [2; 3)$ a megoldás.

Az eredeti egyenlet megoldása:

$$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3).$$

Iskolai forduló C-kategória

C–S–1: Határozzátok meg az összes olyan x, y, z egész számokból álló számhármast, melyekre érvényes

$$x + yz = 2005 \quad (1)$$
$$y + xz = 2006 \quad (2)$$

Megoldás: (2) – (1): $(x - y) \cdot (z - 1) = 1$, ahonnan $x - y = z - 1 = 1$ vagy $x - y = z - 1 = -1$.

Az első esetben $z = 2$, $y = x - 1$. Ezekkel az (1) és (2) egyenletbe helyettesítve $x = 669$; $y = 668$ adódik.

A második esetben $z = 0$, $y = x + 1$ úgy, hogy $x = 2005$ és $y = 2006$.

C–S–2: Mely n természetes számok esetén választhatunk ki az $\{n; n + 1; n + 2; \ldots; n^2\}$ halmazból négy különböző a, b, c, d számot úgy, hogy $a \cdot b = c \cdot d$ legyen?

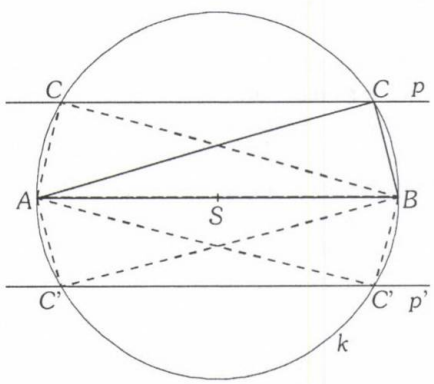
Megoldás: $n = 1$ és $n = 2$ esetén a halmaznak négynél kevesebb eleme van. Minthogy minden n természetes számra érvényes: $n(2n + 2) = 2n(n + 1)$, ezért $a = n$, $b = 2n + 2$, $c = 2n$, $d = n + 1$ választás lehetséges.

Ezek a számok mind különbözőek minden $n > 1$-re, mert ilyen n-ek esetén érvényes: $n < n + 1 < 2n < 2n + 2$.

Marad még megbizonyosodni arról, mely n természetes számokra érvényes: $2n + 2 \le n^2$, hogy a választott négy a, b, c, d szám a halmazból legyen. Belátható, hogy ez az egyenlőtlenség minden $n > 2$-re érvényes, mert ekvivalens a $3 \le (n - 1)^2$ egyenlőtlenséggel.

C–S–3: Adott az AB szakasz. Szerkesszetek C pontot úgy, hogy az ABC háromszög területe $\frac{1}{8}$-a legyen az AB oldalú négyzet S területének, továbbá érvényes legyen, hogy az AC és BC oldalak fölé szerkesztett négyzetek területösszege S legyen!

Megoldás: Annak feltétele, hogy az ABC háromszög területe $\frac{1}{8}$-a legyen az S területének az, hogy az AB oldalhoz tartozó magasság $\frac{|AB|}{4}$ legyen úgy, hogy C-nek az AB-vel párhuzamosokon (p és p') kell feküdnie $\frac{|AB|}{4}$ távolságra az AB egyenestől.



Annak feltétele, hogy az AC és BC oldalak fölé szerkesztett négyzetek területösszege megegyezzen az S területtel az, hogy az ABC háromszögre érvényes legyen Pitagorasz tétele, következésképpen C-nek az AB Thalész körén kell feküdnie, a $k = \left(S; \frac{|AB|}{2}\right)$ körvonalon.

A C pont megszerkesztése egyszerű. A p és p' párhuzamosok négy pontban metszik a k körvonalat, a feladatnak tehát négy megoldása van.

Dr. Darvasi Gyula

A Pitagorasz-tétel egy másik nem közismert általánosítása

Az alábbiakban a Pitagorasz-tétel nem közismert általánosításai közül kívánunk bemutatni még egyet, amely matematikailag legalább olyan szép és vonzó, mint amit [2]-ben már megismerhettünk. Ez az újabb általánosítás a szokásos jelölések megtartásával a következő tételként fogalmazható meg.

Ha az ABC háromszög C csúcsának a B csúcsból megrajzolt magasságvonalra vonatkozó tükörképét C'-vel, az A és C' pontok távolságát d-vel jelöljük, akkor teljesül a

$$c^2 = a^2 \pm bd \qquad (1)$$

összefüggés, ahol $c \geq a$ esetén plusz, míg $c < a$ esetén mínusz jel érvényes.

Ennek az összetett állításnak a bizonyítását a részesetek külön-külön történő megvizsgálásával végezzük el.

Ha $c = a$, vagyis az ABC háromszög egyenlőszárú, akkor a B-ből húzott magasságvonal egybeesik az $\overline{AC}$ alap felező merőlegesével, ezért ezen alap hosszának bármely lehetséges értékére $C' = A$, s így $d = 0$ miatt (1)-ből $c^2 = a^2$ adódik, ami nyilvánvalóan igaz.

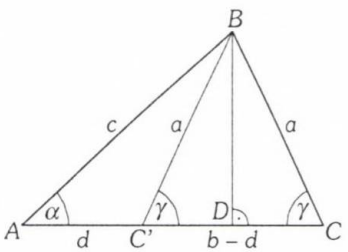
Ha $c > a$, akkor γ lehet hegyes-, derék- vagy tompaszög.

1. eset: $0° < \gamma < 90°$ (1. ábra).

Ekkor C' az $\overline{AC}$ oldal belső pontja, s ennélfogva $d = AC' = AC - CC'$, $AC = b$ és $CC' = 2a \cdot \cos\gamma$ miatt a koszinusztétel alapján

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma =$$
$$= a^2 + b(b - 2a \cdot \cos\gamma) = a^2 + bd$$

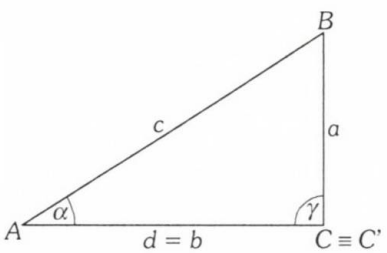
adódik.



1. ábra

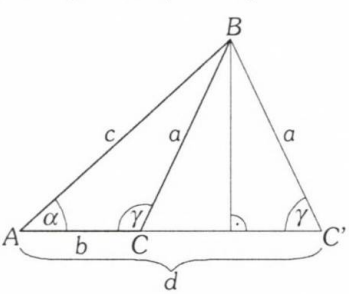
2. eset: $\gamma = 90°$ (2. ábra).

Ekkor $C' \equiv C$ miatt $d = b$, s így (1)-ből $c^2 = a^2 + b^2$ kapható, ami nyilvánvalóan igaz: visszajutottunk a Pitagorasz-tételhez.



2. ábra

3. eset: $90° < \gamma < 180°$ (3. ábra).

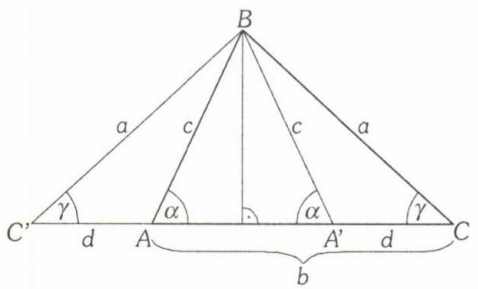


3. ábra

Ekkor C' az $\overrightarrow{AC}$ egyenes A-C-C' elrendezésű pontja, s minthogy $(C')' \equiv C$ és $BC' = BC = a$,

ezért az ABC' háromszögre $c > a$ és $AC'B\sphericalangle = 180^\circ - \gamma < 90^\circ$ miatt az 1. eset szerint $c^2 = a^2 + db$, ami egyenértékű az ABC háromszögre itt bizonyítandó formulával.

Ha pedig $c < a$ (4. ábra), akkor egyrészt C' az $\overline{AC}$ egyenes C-A-C' elrendezésű pontja, másrészt az A-nak a B-ből húzott magasságvonalra vonatkozó tükörképét A'-vel jelölve $A'C = AC' = d$. Ekkor az ABC háromszögre $a > c$ miatt az eddigiek alapján $a^2 = c^2 + bd$ teljesül, ahonnan átrendezéssel a bizonyítandó $c^2 = a^2 - bd$ kapható.



4. ábra

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. Az adott bizonyításból az is kitűnik, hogy további vizsgálódások céljából – a speciális eseteket mellőzve – elegendő a $c > a$ feltétel melletti $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ esettel foglalkozni (1. ábra). Ezt a feltételt megtartva keresünk (1)-re újabb bizonyítási módokat.

Ehhez elsőként a Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazása kínálkozik ([6]), minthogy az ABD és BCD derékszögű háromszögekben közös a $\overline{BD}$ befogó:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$$

$$c^2 - \left(d + \frac{b-d}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{b-d}{2}\right)^2$$

$$c^2 - d^2 - d(b-d) = a^2,$$

ahonnan $c^2 = a^2 + bd$.

Másodikként a Stewart-tétel alkalmazása lehetséges ([6]), mivel az ABC háromszög $\overline{BC'}$ transzverzális szakaszának hossza a és ez a szakasz az $\overline{AC}$ oldalt d és $b - d$ hosszúságú részekre osztja:

$$AC \cdot BC'^2 = AC' \cdot BC^2 + CC' \cdot AB^2 - AC' \cdot CC' \cdot AC$$

$$b \cdot a^2 = d \cdot a^2 + (b-d) \cdot c^2 - d \cdot (b-d) \cdot b$$

$$a^2(b-d) = (c^2 - bd)(b-d),$$

ahonnan $0 < (b-d)$-vel osztva és átrendezve $c^2 = a^2 + bd$.

A harmadik, újabb bizonyításhoz ([1]) felhasználjuk, hogy az ABC és BCC' háromszögek $\overline{AC}$ és $\overline{CC'}$ oldalához tartozó magassága közös, s ennélfogva e háromszögek területeinek arányára egyrészt

$$\frac{t(ABC_\triangle)}{t(BCC'_\triangle)} = \frac{b}{b-d},$$

másrészt a Heron-képlet alapján

$$\frac{t(ABC_\triangle)}{t(BCC'_\triangle)} = \sqrt{\frac{\left[(b+a)^2 - a^2\right] \cdot \left[a^2 - (b-c)^2\right]}{(b-d)^2 \cdot \left[4a^2 - (b-d)^2\right]}}$$

teljesül, s így

$$b^2[4a^2 - (b-d)^2] = [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2],$$

ahonnan elég hosszadalmas számolással

$$(c^2 - a^2 - bd)(c^2 - a^2 - 2b^2 + bd) = 0,$$

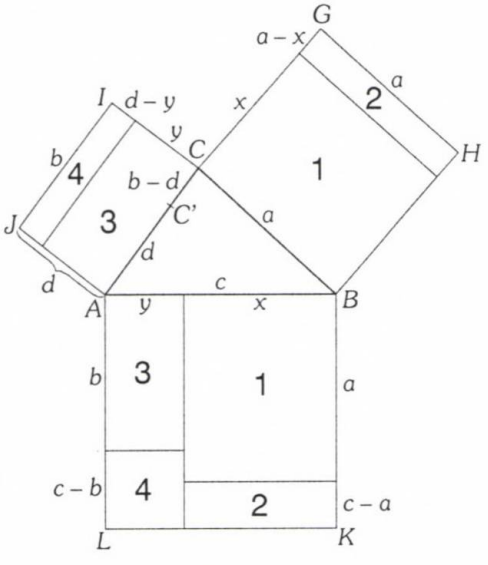
ahol $bd = b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = c^2 - a^2$ miatt a második tényező $2(c^2 - a^2 - b^2)$ alakra hozható, ami $c > a$ és $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ esetén negatív, s ennélfogva az első tényező nulla, azaz a bizonyítandó állítás igaz.

Mindezek után $c > a$ és $c > b$ feltétellel átdarabolásos bizonyítást keresünk a $c^2 = a^2 + bd$ Pitagorasz-típusú formulára. E célból az ABC háromszög oldalai fölé kívülről megszerkesztjük az $ABKL$ és $BCGH$ négyzeteket, valamint azt az $ACIJ$ téglalapot, amelyre $AJ = CI = d$. Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor visszajutunk az ismert pitagoraszi elrendezéshez, amelyre [5, 7, 8]-ban többféle átdarabolásos bizonyítás is található. Mivel ezekre itt nem kívánunk kitérni, ezért a továbbiakban azt is feltételezzük, hogy $\gamma \neq 90^\circ$. Legyen

$x = \frac{a^2}{c}$ és $y = \frac{bd}{c}$, és vegyük észre, hogy $x + y = c$, valamint $x < a$ és $y < d$. Ezután a kívánt átdarabolásos bizonyításra két változatot mutatunk be.

1. változat (5. ábra): Az *ABKL* és *BCGH* négyzeteket és az *ACIJ* téglalapot felosztjuk az 1, 2, 3 és 4 jelű részekre ([3]), amelyekről könnyen megmutatható, hogy páronként egyenlő területűek, s ennélfogva $c^2 = a^2 + bd$ igaz.

Minthogy azonban a 2 és a 4 jelű téglalapok páronként nem egybevágóak, ezért a *BCGH* + + *ACIJ* → *ABKL* átdarabolás során még ezen téglalapok páronkénti egymásba darabolását is el kell végeznünk ([4]-ben 242. oldal), ami véges lépésben mindig megoldható, de ezáltal az átdaraboláshoz az ábrán láthatónál több részre is szükségünk lehet; például $a < c \le 2a$, $b < c$, $c \le 2d < 2c$ és $0° < \gamma < 90°$ esetén pontosan nyolcra.



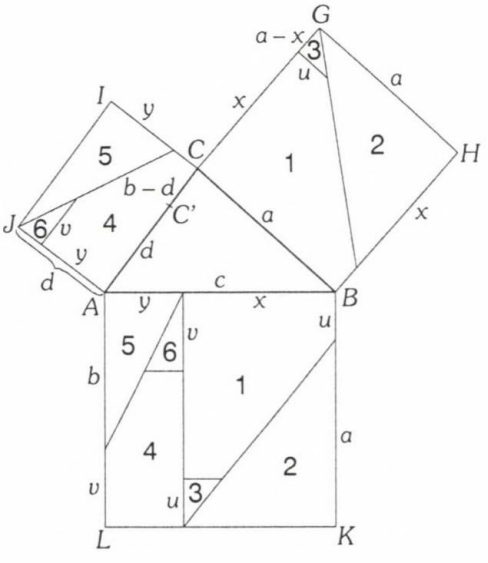
5. ábra

2. változat (6. ábra): Az *ABKL* és *BCGH* négyzeteket és az *ACIJ* téglalapot osszuk fel az ábra szerinti részekre, ahol $u = \frac{a(a-x)}{x} = c - a$ és $v = \frac{b(d-y)}{y} = c - b$. Ennélfogva az azonos számozású részek páronként egybevágók, s így a $BCGH + ACIJ \to ABKL$ átdarabolás elvégezhető, ami által $c^2 = a^2 + bd$ igazolva van.

Végezetül vizsgáljuk meg azt, hogy d milyen értékeket vehet fel. Láttuk már, hogy $c = a$ esetén $d = 0$, valamint $c > a$ és $\gamma = 90°$ esetén $d = b$. Mivel pedig $a < b < c$ és $\gamma \neq 90°$ esetén $d = b - 2a \cdot \cos\gamma$, ezért $0 < d < b$, ha γ hegyesszög, valamint $b < d < b + 2a < 3c$, ha γ tompaszög. Ez a felső korlát még javítható, ha figyelembe vesszük, hogy $c^2 = a^2 + bd$ és $b > c - a$ alapján

$$d = \frac{c^2 - a^2}{b} < \frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a < 2c,$$

s így tehát $0 \le d < 2c$.

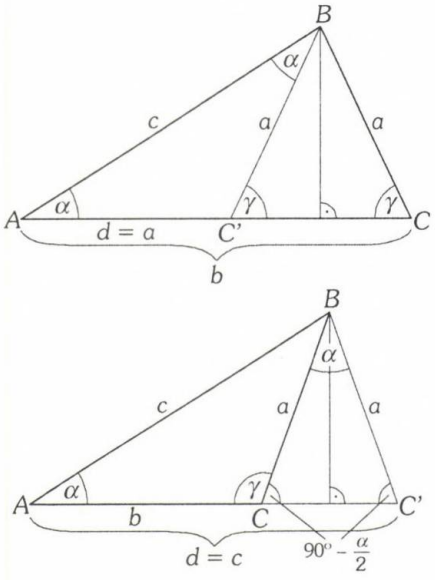


6. ábra

Az $a < b < c$ feltételt megtartva külön-külön foglalkozunk még a $d = a$ és $d = c$ speciális esetekkel (7. ábra).

$d = a$ esetén $a < b$ miatt C' az $\overline{AC}$ oldal belső pontja. Ekkor az ABC' háromszög egyenlőszárú, amelynek $\overline{AB}$ alapján fekvő szögeire $ABC' \sphericalangle = BAC' \sphericalangle = \alpha$, s ennélfogva a C'-nél lévő

külső szögére $\gamma = 2\alpha$ teljesül, amiből egyúttal $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - 3\alpha$ is következik. Az ABC háromszög többi oldalaira pedig $b = AC = AC' + CC' = a + 2a \cdot \cos\gamma = a(1 + 2\cos 2\alpha)$ és $c = AB = 2a \cdot \cos\alpha$ adódik.



7. ábra

$d = c$ esetén $c > b$ miatt C' az $\overline{AC}$ oldalon kívüli pont. Az ABC' háromszög most úgy egyenlőszárú, hogy $\overline{BC'}$ az alapja és az azon nyugvó ABC' és $AC'B$ szögek nagysága $90° - \frac{\alpha}{2}$, de C' előállítása miatt ugyanekkora a $BCC'\sphericalangle$ mértéke, ezért a $\overline{CC'}$ alapú BCC' egyenlőszárú háromszög szárai által bezárt szög is α. Minthogy a $\gamma = ACB\sphericalangle$ a $BCC'\sphericalangle$ mellékszöge, ezért $\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2}$, s így az ABC háromszögből $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 90° - \frac{3\alpha}{2}$ kapható. Az ABC háromszög többi oldalaira ezután $a = BC = BC' = 2c\sin\frac{\alpha}{2}$ és $b = AC = AC' - CC' = c - 2a\sin\frac{\alpha}{2} = c - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = c\left(1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ adódik.

Mindebből úgy tűnik, hogy a fenti két eset a és α, illetve c és α megadása után egyértelműen meghatározott. Ámde míg a és c tetszőlegesen megadhatók, addig α csak bizonyos korlátok között. Ugyanis az $a < b < c$ kezdeti feltétel szerint $\alpha < \beta < \gamma$ is fennáll, ami a szögekre kapott előbbi összefüggések felhasználásával $d = a$ esetén a $36° < \alpha < 45°$, $d = c$ esetén pedig a $0° < \alpha < 36°$ egyenlőtlenségekre vezet. A többi szögekre ugyanekkor $45° < \beta < 72° < \gamma < 90°$ illetve $36° < \beta < 90° < \gamma < 108°$ teljesül.

Irodalom

[1] Darvasi, Gy.: More notes on a neglected Pythagorean-like formula. Math. Gazette, Nov. 2001, 483–486.

[2] Darvasi, Gy.: A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása. A Matematika Tanítása, 2004. 5. szám, 25–27.

[3] Darvasi, Gy.: Yet more on a neglected Pythagorean-like formula. Math. Gazette, Nov. 2005 (közlésre elfogadva)

[4] Eves, H.: A survey of geometry. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.

[5] Fraedrich, A. M.: Die Satzgruppe des Pythagoras B.I. Wiss. Verlag, Mannheim, 1995.

[6] Hoehn, L.: A neglected Pythagorean-like formula. Math. Gazette, March 2000, 71–73.

[7] Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz Teubner Verlag, Leipzig, 1917.

[8] Loomis, E. S.: The Pythagorean proposition NCTM, Washington, D.C., 1968.

Molnár István

A Stewart-tétel és alkalmazásai

A Matematika Tanítása egy régebbi számában egy versenyfeladat kapcsán említésre került a Stewart-tétel, mint a feladat szerzői számára ismeretlen tétel. Ez adta az ötletet, hogy bemutassam ezt a kevésbé ismert összefüggést néhány alkalmazásán keresztül.

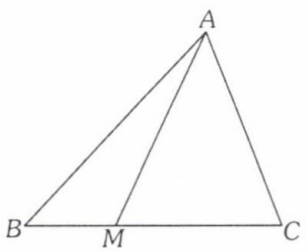
Tétel (Stewart)

Legyen ABC egy háromszög és M a BC oldal egy pontja. Ekkor teljesül:

$$AM^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot CM.$$

Bizonyítás

Legyen az $ABC\sphericalangle = \beta$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az ABM, illetve ABC háromszögekben (1. ábra).



1. ábra

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\beta \quad / \cdot BC$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \quad / \cdot BM$$

$$AM^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot BC + BM^2 \cdot BC - 2AB \cdot BM \cdot BC \cdot \cos\beta$$

$$AC^2 \cdot BM = \\ = AB^2 \cdot BM + BC^2 \cdot BM - 2AB \cdot BC \cdot BM \cdot \cos\beta$$

Kivonva a két egyenlőséget egymásból:

$$AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM = \\ = AB^2 \cdot BC - AB^2 \cdot BM + BM^2 \cdot BC - BC^2 \cdot BM$$

$$AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM = \\ = AB^2 \cdot (BC - BM) - BM \cdot BC \cdot (BC - BM),$$

mivel $BC - BM = MC \Rightarrow AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC$.

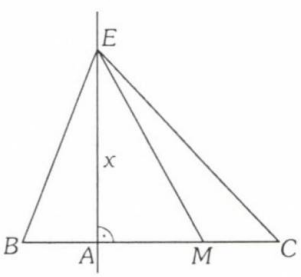
Megjegyzések

1. A Stewart-tétel az alábbi alakban is kijelenthető:

Ha M a BC szakasz egy tetszőleges pontja, akkor bármely A pont esetén

$$AM^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot CM.$$

Ha $A \notin BC$ egyenes, akkor épp a fenti bizonyításra van szükségünk.
Ha $A \in BC$ szakasz, akkor legyen E az A pontban a BC-re állított merőleges egy tetszőleges A-tól különböző pontja (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az EBC háromszögben felírható a Stewart-tétel:

$$EM^2 \cdot BC = \\ = EB^2 \cdot MC + EC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC.$$

Alkalmazva a Pitagorasz-tételt a megfelelő háromszögekben kapjuk, hogy:

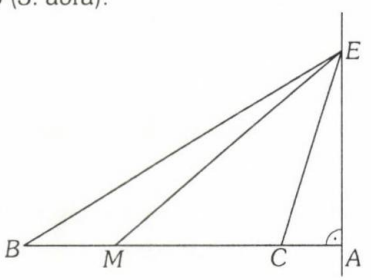
$$EB^2 = AB^2 + x^2; \quad EM^2 = AM^2 + x^2;$$
$$EC^2 = AC^2 + x^2$$

$$(AM^2 + x^2) \cdot BC = (AB^2 + x^2) \cdot MC + \\ + (AC^2 + x^2) \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC$$

$$AM^2 \cdot BC + x^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot MC + x^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM + \\ + x^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC \quad / - x^2 \cdot BC$$

mivel $x^2 \cdot (MC + BM) = x^2 \cdot BC \Rightarrow AM^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC.$

Ha $A \notin BC$ szakasz, de $A \in BC$ egyenes, akkor a bizonyítás gondolatmenete az előbbivel megegyező (3. ábra).



3. ábra

2. A Stewart-tétel akkor is igaz, ha M a BC egyenes egy tetszőleges pontja, de ekkor az

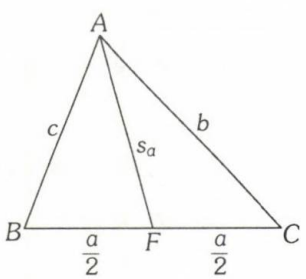
$$AM^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC$$

kifejezésben szereplő mennyiségeket irányítottnak kell tekinteni.

Alkalmazások

1. Egy háromszög oldalai a, b, c. Mekkora az „a" oldalhoz tartozó súlyvonal?

Alkalmazzuk a Stewart-tételt úgy, hogy M a BC oldal F felezőpontja (4. ábra).



4. ábra

$$AF^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot FC + AC^2 \cdot BF - BC \cdot BF \cdot FC$$

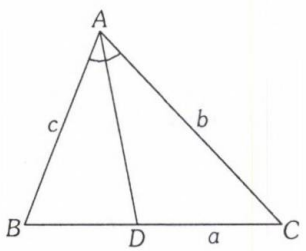
$$s_a^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \quad / : a$$

$$s_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow s_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

2. Legyen ABC egy háromszög és AD az A szög belső szögfelezője ($D \in BC$). Akkor $AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$, ahol $p = \frac{K}{2}$ az ABC háromszög félkerülete.

Alkalmazzuk a szögfelező tételt az ABC háromszögben (5. ábra) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$.

Mivel $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ és $BD + DC = a$, innen egyszerű számításokkal $BD = \frac{ac}{b+c}$ és $DC = \frac{ab}{b+c}$.



5. ábra

Alkalmazzuk a Stewart-tételt, mikor $M = D$

$$AD^2 \cdot BC = \\ = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC$$

$$AD^2 \cdot a = \\ = c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a \quad / : a$$

$$AD^2 = \frac{bc^2 + b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \\ = \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = \\ = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} =$$

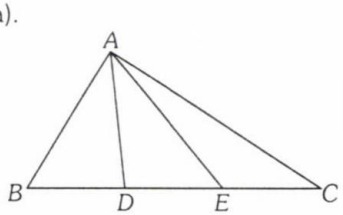
$$= \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} =$$

$$= \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

azaz $AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$.

3. ABC egy derékszögű háromszög. Legyen D és E a BC átfogó két harmadolópontja. Bizonyítsuk be, hogy $AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}BC^2$!

Alkalmazzuk a Stewart-tételt ABC háromszögben először $M = D$, majd $M = E$ esetben (6. ábra).



6. ábra

$$AD^2 \cdot BC =$$
$$= AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC$$

$$AE^2 \cdot BC =$$
$$= AB^2 \cdot EC + AC^2 \cdot BE - BE \cdot EC \cdot BC$$

Felhasználva, hogy $BD = EC = \frac{1}{3}BC$ és $DC = BE = \frac{2}{3}BC$

$$AD^2 \cdot BC =$$
$$= AB^2 \cdot \frac{2}{3}BC + AC^2 \cdot \frac{1}{3}BC - \frac{1}{3}BC \cdot \frac{2}{3}BC \cdot BC$$

$$AE^2 \cdot BC =$$
$$= AB^2 \cdot \frac{1}{3}BC + AC^2 \cdot \frac{2}{3}BC - \frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{3}BC \cdot BC.$$

Végigosztva mindkét egyenlőséget BC-vel, kapjuk, hogy

$$AD^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$$

$$AE^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2.$$

Összegezve őket $\Rightarrow AD^2 + AE^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{4}{9}BC^2$.

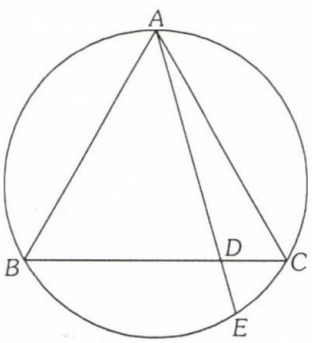
Másrészt $DE^2 = \frac{1}{9} \cdot BC^2$, illetve $AB^2 + AC^2 = BC^2$ összefüggéseket figyelembe véve

$$AD^2 + AE^2 + DE^2 =$$
$$= BC^2 + \frac{1}{9}BC^2 - \frac{4}{9}BC^2 = \frac{6}{9}BC^2 = \frac{2}{3}BC^2$$

azaz $AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}BC^2$.

4. Legyen ABC egy egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$), és legyen D a BC oldal egy tetszőleges pontja. Az AD szakasz meghosszabbítása E-ben metszi a háromszög köré írható kört. Bizonyítsuk be, hogy $AB^2 = AD \cdot AE$!

Alkalmazzuk a Stewart-tételt az ABC háromszögben, mikor $M = D$ (7. ábra)!



7. ábra

$$AD^2 \cdot BC =$$
$$= AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC.$$

Felhasználva, hogy $AB = AC$, majd átrendezve a fenti összefüggést kapjuk, hogy

$$AB^2 \cdot DC + AB^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC =$$
$$= BD \cdot DC \cdot BC$$

$$AB^2 \cdot (DC + BD) - AD^2 \cdot BC =$$
$$= BD \cdot DC \cdot BC \quad / : BC$$

(mivel $DC + BD = BC$) $\Rightarrow AB^2 - AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC$ (*).

Az $ABC_\triangle \sim DEC_\triangle$, mert $BDA\sphericalangle = CDE\sphericalangle$ (csúcsszögek), $BAE\sphericalangle = DCE\sphericalangle$ (azonos köríven – BE – nyugvó kerületi szögek) $\Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AD}{DC}$

másképp $BD \cdot DC = AD \cdot DE$.

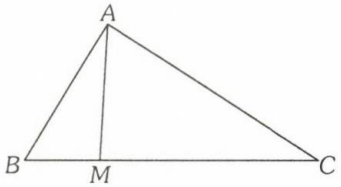
A kapott összefüggést behelyettesítve a (*)-ba

$$AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC =$$
$$= AD^2 + AD \cdot DE = AD \cdot (AD + DE) = AD \cdot AE$$

azaz $AB^2 = AD \cdot AE$.

5. Legyen ABC egy háromszög és M a BC oldal egy pontja. Tudva, hogy teljesül az $MA^2 \cdot BC^2 = MB^2 \cdot AC^2 + MC^2 \cdot AB^2$ összefüggés, bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Alkalmazzuk az ABC háromszögben a Stewart-tételt (8. ábra).



8. ábra

$$MA^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC +$$
$$+ AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC \quad / \cdot BC$$

$$MA^2 \cdot BC^2 =$$
$$= AB^2 \cdot MC \cdot BC + AC^2 \cdot BM \cdot BC - BM \cdot MC \cdot BC^2,$$

de $MA^2 \cdot BC^2 = MB^2 \cdot AC^2 + MC^2 \cdot AB^2$, kivonva őket egymásból $\Rightarrow$

$$0 = AC^2 \cdot MB \cdot (BC - MB) +$$
$$+ AB^2 \cdot MC \cdot (BC - MC) - BM \cdot MC \cdot BC^2$$

mivel $BC - MB = MC$ és $BC - MC = BM \Rightarrow$

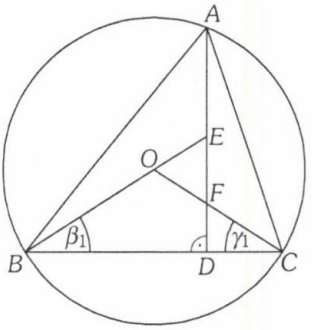
$$BM \cdot MC \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BM \cdot MC +$$
$$+ AB^2 \cdot MC \cdot BM \quad / : (MC \cdot BM)$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2,$$

ahol Pitagorasz tételének megfordításából $\Rightarrow$ Az ABC háromszög derékszögű ($BAC\sphericalangle = 90°$).

6. Tegyük fel, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $AB > AC$, és jelölje a háromszög köré írt kör középpontját O. Az A csúcsból húzott magasságvonal a BO egyenest az E, a CO egyenest az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AE \cdot AF = BE \cdot CF$! (A IX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik feladata.)

Legyen $EBC\sphericalangle = \beta_1$, $FCD\sphericalangle = \gamma_1$, és jelölje R az ABC háromszög köré írt kör sugarát (9. ábra).



9. ábra

Mivel OBC háromszög egyenlő szárú ($OB = OC = R$) $\Rightarrow \beta_1 = \gamma_1$.

Az EBD háromszögben $BED\sphericalangle = 90° - \beta_1$, FDC háromszögben $CFD\sphericalangle = 90° - \gamma_1$ és $OFE\sphericalangle = CFD\sphericalangle$ (csúcsszögek) $\Rightarrow BED\sphericalangle = OFE\sphericalangle \Rightarrow$ OFE háromszög egyenlő szárú, vagyis $OE = OF$.

Alkalmazzuk a Stewart-tételt az AOF háromszögben, ahol $M = E$

$$OE^2 \cdot AF = OF^2 \cdot AE + OA^2 \cdot EF - AE \cdot EF \cdot AF$$

felhasználva, hogy $OE = OF$ és $OA = OB = OC = R$

$$OE^2 \cdot AF = OE^2 \cdot AE + R^2 \cdot (AF - AE) -$$
$$- AE \cdot AF \cdot (AF - AE)$$

$$OE^2 \cdot (AF - AE) = R^2 \cdot (AF - AE) -$$
$$- AE \cdot AF \cdot (AF - AE) \quad / : (AF - AE)$$

$$OE^2 = R^2 - AE \cdot AF \Rightarrow AE \cdot AF = R^2 - OE$$

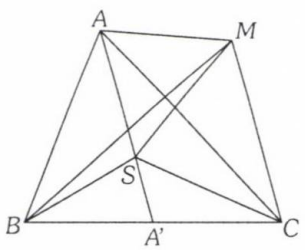
$$AE \cdot AF = (R - OE) \cdot (R + OE) =$$
$$= (R - OF) \cdot (R + OE) =$$
$$= (OC - OF) \cdot (OB + OE) = CF \cdot BE$$

azaz $AE \cdot AF = BE \cdot CF$.

7. Legyen S az ABC háromszög súlypontja, és M a sík egy tetszőleges pontja. Igazoljuk, hogy

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2 + SA^2 + SB^2 + SC^2.$$

Legyen A' a BC oldal felezőpontja. Alkalmazzuk a Stewart-tételt az MAA' háromszögben (10. ábra).



10. ábra

$$MS^2 \cdot AA' =$$
$$= MA^2 \cdot SA' + MA'^2 \cdot SA - SA' \cdot SA \cdot AA',$$

Felhasználva, hogy $SA = \frac{2}{3}AA'$ és $SA' = \frac{1}{3}AA'$

$$MS^2 \cdot AA' = MA^2 \cdot \frac{1}{3}AA' +$$
$$+ MA'^2 \cdot \frac{2}{3}AA' - \frac{1}{3}AA' \cdot \frac{2}{3}AA' \cdot AA' \quad / : AA'$$
$$MS^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}MA'^2 - \frac{2}{9}AA'^2,$$

mivel MA' az MBC háromszög súlyvonala.

$$\Rightarrow MS^2 = \frac{1}{3}MA^2 +$$
$$+\frac{2}{3}\left(\frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right) - \frac{2}{9}AA'^2 \quad / \cdot 3$$
$$3MS^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 -$$
$$- \frac{1}{2}BC^2 - \frac{2}{3}AA'^2 \quad (*).$$

Az SA' az SBC háromszög súlyvonala $\Rightarrow SA'^2 =$
$= \frac{SB^2 + SC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}BC^2 = 2SA'^2 -$
$- SB^2 - SC^2$ behelyettesítve a (*)-ba

$$3MS^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 +$$
$$+2SA'^2 - SB^2 - SC^2 - \frac{2}{3}AA'^2,$$

de $SA' = \frac{1}{2}SA$ és $AA' = \frac{3}{2}SA \Rightarrow 3MS^2 = MA^2 +$

$$+ MB^2 + MC^2 + \frac{1}{2}SA^2 - SB^2 - SC^2 - \frac{3}{2}SA^2$$

$$3MS^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - SA^2 - SB^2 - SC^2$$

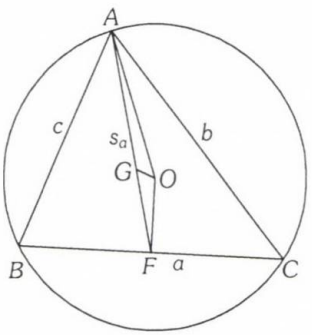
átrendezve

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2 + SA^2 + SB^2 + SC^2.$$

Megjegyzés: A fenti összefüggést felhasználva belátható, hogy az $MA^2 + MB^2 + MC^2$ kifejezés akkor minimális, ha $M = S$.

8. Legyen G az ABC háromszög súlypontja, és O a háromszög köré írt kör középpontja. Fejezzük ki OG-t a háromszög oldalai és a köré írható kör sugarának függvényében!

Legyenek a, b, c a háromszög oldalai és R a háromszög köré írható kör sugara. Legyen F a BC oldal felezőpontja (11. ábra).



11. ábra

Alkalmazzuk a Stewart-tételt az OAF háromszögben, ahol $M = G$.

$$OG^2 \cdot AF =$$
$$= OA^2 \cdot GF + OF^2 \cdot AG - AG \cdot GF \cdot AF.$$

Mivel $OA = R$, $AF = s_a$, $GF = \frac{1}{3}s_a$, $AG = \frac{2}{3}s_a$

következik, hogy

$$OG^2 \cdot s_a =$$

$$= R^2 \cdot \frac{1}{3} s_a + OF^2 \cdot \frac{2}{3} s_a - \frac{2}{3} s_a \cdot \frac{1}{3} s_a \cdot s_a \qquad / : s_a$$

$$OG^2 = \frac{1}{3} R^2 + \frac{2}{3} OF^2 - \frac{2}{9} s_a^2. \qquad (*)$$

Az $OBC_\triangle$ egyenlő szárú $(OB = OC = R) \Rightarrow$ $\Rightarrow OF \perp BC$, ezért $OF^2 = OC^2 - FC^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$.

Felhasználva, hogy $s_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$

$$OG^2 = \frac{1}{3} R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} R^2 + \frac{2}{3} R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{9} - \frac{c^2}{9} + \frac{a^2}{18} =$$

$$= R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

azaz

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OG = \frac{\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}}{3}.$$

Következmény

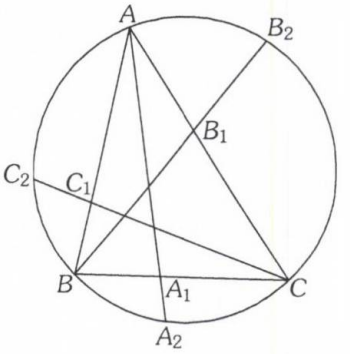
1. $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$
2. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \le \frac{9}{4}$

bármely a, b, c oldalú és α, β, γ szögű háromszög esetén (az egyenlőség a szabályos háromszög esetén áll fenn).

9. Az ABC háromszög AB, AC, BC oldalain rendre felvesszük a tetszőleges C_1, B_1 és A_1 pontokat. Az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek a háromszög köré írt kört rendre A_2, B_2, C_2 pontokban metszik. Ekkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \ge 9.$$

Legyen $\frac{BA_1}{A_1C} = x$, $\frac{CB_1}{B_1A} = y$, $\frac{AC_1}{C_1B} = z$ (12. ábra).



12. ábra

Felírjuk az A_1 belső pont körre vonatkozó hatványát:

$$A_1A_2 \cdot AA_1 = BA_1 \cdot A_1C \Rightarrow A_1A_2 = \frac{BA_1 \cdot A_1C}{AA_1}.$$

Innen $\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA_1^2}{BA_1 \cdot A_1C}$-t kapjuk.

Ha $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$ jelöléseket vezetünk be, akkor

$$A_1C = \frac{a}{x+1} \quad \text{és} \quad BA_1 = \frac{ax}{x+1}.$$

Alkalmazzuk a Stewart-tételt az ABC háromszögben, ahol $M = A_1$.

$$AA_1^2 \cdot BC =$$

$$= AB^2 \cdot A_1C + AC^2 \cdot BA_1 - BA_1 \cdot A_1C \cdot BC$$

$$AA_1^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{x+1} +$$

$$+ b^2 \cdot \frac{ax}{x+1} - \frac{ax}{x+1} \cdot \frac{a}{x+1} \cdot a \qquad / : a$$

$$AA_1^2 = \frac{c^2(x+1) + b^2x(x+1) - a^2x}{(x+1)^2}$$

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA_1^2}{BA_1 \cdot A_1C} =$$

$$= \frac{\dfrac{c^2(x+1) + b^2x(x+1) - a^2x}{(x+1)^2}}{\dfrac{ax}{x+1} \cdot \dfrac{a}{x+1}} =$$

$$= \frac{c^2(x+1)+b^2x(x+1)-a^2x}{a^2x} =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2x}+\frac{b^2x}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}-1.$$

Alkalmazva a számtani és mértani közép közötti összefüggést ($n = 4$; $A+B+C+D \geq 4\sqrt[4]{ABCD}$; $A, B, C, D \geq 0$)

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2x}+\frac{b^2x}{a^2}+\frac{b^2}{a^2} \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2x}\cdot\frac{b^2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}} = 4\frac{bc}{a^2}$$

Tehát $\frac{AA_1}{A_1A_2} \geq 4\frac{bc}{a^2}-1$.

Hasonló gondolatmenettel felírhatók a $\frac{BB_1}{B_1B_2} \geq$ $\geq 4\frac{ac}{b^2}-1$ és $\frac{CC_1}{C_1C_2} \geq 4\frac{ab}{c^2}-1$ egyenlőtlenségek is.

Összegezve az egyenlőtlenségeket:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2}+\frac{BB_1}{B_1B_2}+\frac{CC_1}{C_1C_2} \geq 4\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)-3.$$

Újra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti összefüggést ($n = 3$; $A+B+C \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{ABC}$; $A, B, C \geq 0$)

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot\frac{ab}{c^2}} = 3\cdot 1 = 3.$$

Tehát

$$\frac{AA_1}{A_1A_2}+\frac{BB_1}{B_1B_2}+\frac{CC_1}{C_1C_2} \geq$$

$$\geq 4\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)-3 \geq 4\cdot 3-3 = 9,$$

azaz

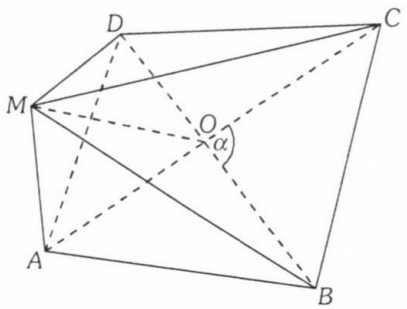
$$\frac{AA_1}{A_1A_2}+\frac{BB_1}{B_1B_2}+\frac{CC_1}{C_1C_2} \geq 9.$$

10. Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, O a négyszög átlóinak metszéspontja, és M egy tetszőleges térbeli pont. Akkor fennáll

$$MA^2 \cdot T_{BCD_\triangle} + MC^2 \cdot T_{ABD_\triangle} = MB^2 \cdot T_{ACD_\triangle} +$$
$$+ MD^2 \cdot T_{ABC_\triangle} + (AO \cdot OC - BO \cdot OD) \cdot T_{ABCD}$$

(térbeli Stewart összefüggés).

Legyen $BOC\sphericalangle = \alpha$. Alkalmazzuk a Stewart-tételt az MAC és DMB háromszögekben (13. ábra).



13. ábra

$$MO^2 \cdot AC =$$
$$= MA^2 \cdot OC + MC^2 \cdot AO - AO \cdot OA \cdot AC \quad / \cdot BD$$

$$MO^2 \cdot BD =$$
$$= MB^2 \cdot OD + MD^2 \cdot BO - BO \cdot OD \cdot BD \quad / \cdot AC$$

$$MO^2 \cdot AC \cdot BD = MA^2 \cdot OC \cdot BD +$$
$$+ MC^2 \cdot AO \cdot BD - AO \cdot OC \cdot AC \cdot BD$$

$$MO^2 \cdot BD \cdot AC = MB^2 \cdot OD \cdot AC +$$
$$+ MD^2 \cdot BO \cdot AC - BO \cdot OD \cdot BD \cdot AC$$

A két utolsó egyenlőséget kivonva egymásból:

$$0 = MA^2 \cdot OC \cdot BD + MC^2 \cdot AO \cdot BD -$$
$$- MB^2 \cdot OD \cdot AC - MD^2 \cdot BO \cdot AC -$$
$$- AC \cdot BD \cdot (AO \cdot OC - BO \cdot OD)$$

$$MA^2 \cdot OC \cdot BD + MC^2 \cdot AO \cdot BD =$$
$$= MB^2 \cdot OD \cdot AC + MD^2 \cdot BO \cdot AC +$$
$$+ (AO \cdot OC - BO \cdot OD) \cdot AC \cdot BD \quad (*)$$

A (*) egyenlőséget végigszorozzuk $\frac{1}{2}$-del és $\sin\alpha$-val.

$$MA^2 \cdot \frac{OC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} + MC^2 \cdot \frac{AO \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} =$$
$$= MB^2 \cdot \frac{OD \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} + MD^2 \cdot \frac{BO \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} +$$
$$+(AO \cdot OC - BO \cdot OD) \cdot \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2},$$

Felhasználva, hogy $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

$$\frac{OC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{OC \cdot (BO + OD) \cdot \sin\alpha}{2} =$$
$$= \frac{OC \cdot BO \cdot \sin\alpha + OC \cdot OD \cdot \sin\alpha}{2} =$$
$$= \frac{OC \cdot BO \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{OC \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha)}{2} =$$
$$= T_{BOC_\triangle} + T_{COD_\triangle} = T_{BCD_\triangle}.$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\frac{AO \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} = T_{ABD_\triangle},$$
$$\frac{OD \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = T_{ACD_\triangle},$$
$$\frac{BO \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = T_{ABC_\triangle},$$

valamint, hogy

$$\frac{BD \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = T_{ABCD}.$$

Tehát

$$MA^2 \cdot T_{BCD_\triangle} + MC^2 \cdot T_{ABD_\triangle} =$$
$$= MB^2 \cdot T_{ACD_\triangle} + MD^2 \cdot T_{ABC_\triangle} +$$
$$+ (AO \cdot OC - BO \cdot OD) \cdot T_{ABCD}. \quad (**)$$

Megjegyzés:

1. Ha az $ABCD$ négyszög körbeírható, akkor az O pont körre vonatkozó hatványa miatt $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, azaz (**) összefüggés átalakul

$$MA^2 \cdot T_{BCD_\triangle} + MC^2 \cdot T_{ABD_\triangle} =$$
$$= MB^2 \cdot T_{ACD_\triangle} + MD^2 \cdot T_{ABC_\triangle} \quad (***)$$

alakra.

2. Ha a (***) összefüggést végigszorozzuk $4R$-rel, ahol R az $ABCD$ négyszög köré írt kör sugara és felhasználjuk, hogy $T_\triangle = \frac{abc}{4R}$

$$\Rightarrow MA^2 \cdot T_{BCD_\triangle} \cdot 4R + MC^2 \cdot T_{ABD_\triangle} \cdot 4R =$$
$$= MB^2 \cdot T_{ACD_\triangle} \cdot 4R + MD^2 \cdot T_{ABC_\triangle} \cdot 4R \Rightarrow$$
$$MA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot BD + MC^2 \cdot AB \cdot BD \cdot AD =$$
$$= MB^2 \cdot AC \cdot CD \cdot AD + MD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot AC.$$
$$(****)$$

3. Ha a (****) összefüggésben M helyébe A-t írok

$$AC^2 \cdot AB \cdot BD \cdot AD = AB^2 \cdot AC \cdot CD \cdot AD +$$
$$+ AD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot AC \quad /: (AB \cdot AC \cdot AD)$$
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(Ptolemaiosz 1. tétele)

Ha a (****) összefüggésben M helyébe K-t írok, ahol K az $ABCD$ négyszög köré írt kör középpontja és felhasználom, hogy $KA = KB = KC = KD = R$

$$KA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot BD + KC^2 \cdot AB \cdot BD \cdot AD =$$
$$= KB^2 \cdot AC \cdot CD \cdot AD + KD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot AC \quad /: R^2$$
$$BD \cdot (BC \cdot CD + AB \cdot AD) =$$
$$= AC \cdot (CD \cdot AD + AB \cdot BC)$$

átrendezve

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

(Ptolemaiosz 2. tétele).

11. Igazoljuk, hogy bármely D pontra, amely nincs a BC egyenesen, léteznek olyan A pontok, amelyekre teljesül a Stewart-összefüggés, azaz

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC.$$

Legyen DD' a DBC háromszög belső szögfelezője.

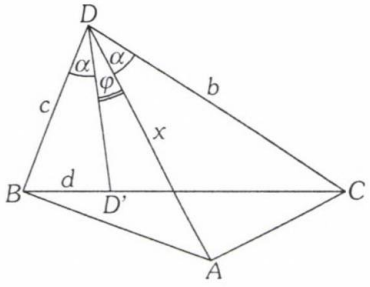
Legyen $DB = c$, $DC = b$, $BC = d$ és $BDD' \sphericalangle = D'DC \sphericalangle = \alpha$.

Legyen A egy pont úgy, hogy $AD = x$ és $D'DA \sphericalangle = \varphi$ (14. ábra).

Alkalmazva a cosinus tételt az ADB és ADC háromszögekben:

$$AB^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$
$$AC^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

összefüggéseket kapjuk.



14. ábra

Behelyettesítve a Stewart-féle összefüggésbe, kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot d = [c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos(\alpha + \varphi)] \cdot b + \\ + [b^2 + x^2 - 2bx \cdot \cos(\alpha - \varphi)] \cdot c - c \cdot b \cdot d$$

$$0 = c^2b + x^2b - 2bcx \cdot \cos(\alpha + \varphi) + b^2c + x^2c - \\ - 2bcx \cdot \cos(\alpha - \varphi) - bcd - x^2d.$$

Az x hatványai szerint csoportosítva

$$x^2(b + c - d) - 2xbc[\cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha - \varphi)] + \\ + bc(b + c - d) = 0$$

$$x^2(b + c - d) - 4xbc \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi) + \\ + bc(b + c - d) = 0. \quad (*)$$

Belátható, hogy akkor léteznek olyan A pontok, amelyekre teljesül a Stewart-összefüggés, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa nemnegatív, vagyis

$$16b^2c^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\alpha - \\ - 4bc(b + c - d)^2 \geq 0 \quad /: 4bc$$

$$4bc \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi - (b + c - d)^2 \geq 0. \quad (**)$$

Ha a DBC háromszögben is alkalmazzuk a cosinus tételt

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$$
$$2bc \cdot \cos 2\alpha = b^2 + c^2 - d^2 \Rightarrow$$
$$2bc(2\cos^2\alpha - 1) = b^2 + c^2 - d^2 \Rightarrow$$
$$4bc \cdot \cos^2\alpha = b^2 + c^2 - d^2 + 2bc = (b + c)^2 - d^2.$$

Behelyettesítve a (**) egyenlőtlenségbe

$$[(b + c)^2 - d^2] \cdot \cos^2\varphi - (b + c - d)^2 \geq 0$$

$$(b + c + d)(b + c - d) \cdot \cos^2\varphi \geq \\ \geq (b + c - d)^2 \quad /: (b + c - d),$$

mert $b + c > d$

$$(b + c + d)\cos^2\varphi \geq b + c - d$$

$$\cos^2\varphi \geq \frac{b + c - d}{b + c + d}. \quad (***)$$

Mivel a jobb oldalon lévő mennyiség kisebb, mint 1, ebből következik, hogy létezik ilyen φ szög, azaz létezik a keresett pont.

Megjegyzés: Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a mértani helye az ilyen A pontoknak, ha a DBC háromszöget lerögzítjük.

Belátható, hogy a (***) összefüggést minden olyan DA egyenes teljesíti, amelynek a DD' szögfelezővel alkotott φ szöge legfeljebb $\psi = \arccos\sqrt{\frac{b + c - d}{b + c + d}}$ lehet. Az így meghatározott φ szögre a (*) egyenletnek 2 valós x_1, x_2 gyöke lesz (sőt pozitívak, ha φ szöget a megfelelő negyedben választjuk meg). Tehát léteznek A_1, A_2 pontok úgy, hogy $DA_1 = x_1$ és $DA_2 = x_2$ lesz.

Másrészt $DA_1 \cdot DA_2 = x_1x_2 = bc$ lesz, ami független a φ megválasztásától. Legyen E és F az A_1, illetve A_2-nek megfelelő pontok, ha $\varphi = 0$. Mivel $DA_1 \cdot DA_2 = bc = DE \cdot DF \Rightarrow A_1$, A_2, E és F pontok egy körön vannak.

Tehát a keresett mértani hely egy olyan kör lesz, melynek középpontja a DBC háromszög DD' szögfelezőjén van, és D-ből 2ψ szög alatt látszik (15. ábra).

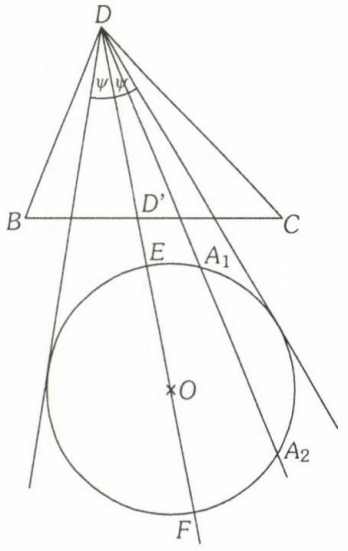
Folytatva az elemzést, további pontosításokat tehetünk. A keresett kör középpontja O, ami az EF szakasz felezőpontja, $DO = \frac{DE + DF}{2} =$

$= \frac{x_1 + x_2}{2}$, amiből a (*) egyenlet alapján (ha $\varphi = 0$) $\Rightarrow DO = \frac{2bc \cdot \cos\alpha}{b + c - d}$, ami az O pont távolsága a D-től.

Ha r-el jelöljük a keresett kör sugarát, akkor

$$2r = |DF - DE| = |x_2 - x_1|$$

$$4r^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$$
$$= \left(\frac{4bc \cdot \cos\alpha}{b + c - d}\right)^2 - 4bc = \frac{16b^2c^2 \cdot \cos^2\alpha}{(b + c - d)^2} - 4bc =$$



15. ábra

$$= 4bc\left[\frac{4bc\cdot\cos^2\alpha}{(b+c-d)^2}-1\right] =$$

$$= 4bc\left[\frac{(b+c+d)(b+c-d)}{(b+c-d)^2}-1\right] =$$

$$= 4bc\left[\frac{b+c+d}{b+c-d}-1\right] = \frac{8bcd}{b+c-d}$$

azaz $r^2 = \frac{2bcd}{b+c-d}$, vagyis $r = \sqrt{\frac{2bcd}{b+c-d}}$. Összefoglalva $DO = \frac{2bc\cdot\cos\alpha}{b+c-d}$ és $r = \sqrt{\frac{2bcd}{b+c-d}}$.

Legyen R a DBC háromszög köré írt kör sugara, ρ_d a d oldalt érintő, a DBC háromszög hozzáírt körének sugara.

Tudjuk, hogy $\rho_d = \frac{T_\triangle}{p-d}$; $R = \frac{bcd}{4T_\triangle}$, illetve azt, hogy a hozzáírt kör középpontjának távolsága az oldallal szemközti csúcstól $k = \frac{\rho_d}{\sin\frac{BDC\sphericalangle}{2}}$, ahol $T_\triangle$ a BDC háromszög területe és p a háromszög félkerülete.

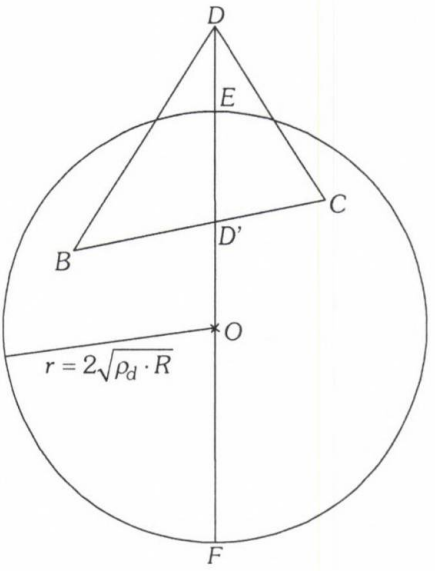
Ekkor

$$k = \frac{\rho_d}{\sin\frac{BDC\sphericalangle}{2}} = \frac{\frac{T_\triangle}{p-d}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{bc\cdot\sin 2\alpha}{2}}{\frac{b+c-d}{2}\cdot\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2bc\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(b+c-d)\sin\alpha} = \frac{2bc\cdot\cos\alpha}{b+c-d} = DO$$

$$\rho_d\cdot R = \frac{T_\triangle}{p-d}\cdot\frac{bcd}{4T_\triangle} = \frac{bcd}{2(b+c-d)} =$$

$$= \frac{r^2}{4} \Rightarrow r = 2\cdot\sqrt{\rho_d\cdot R}.$$



16. ábra

Összegezve tehát, a keresett mértani hely egy olyan kör, melynek középpontja a DBC háromszög BC oldalához hozzáírt kör középpontja, és sugara pedig $\sqrt{4R\rho_d}$, ahol ρ_d az előbb megnevezett hozzáírt kör sugara, R pedig a DBC háromszög köré írt kör sugara (16. ábra).

KÖNYVISMERTETÉS

Ambrus András

Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek

Nagy örömmel üdvözlöm a Typotex kiadó ezen új kiadványát. A szerző nemzetközileg elismert matematikadidaktikus, nagy tapasztalata van az oktatáskutatás-fejlesztés (tantervfejlesztés), a tanítóképzés, de az iskolai tanítás területén is. Fontosnak tartom megjegyezni, hogy személyes munkakapcsolata volt Varga Tamással, sokat tanulhatott tőle. E munkán érződik az ő hatása is.

A dialógusforma lehetővé teszi az egyes problémakörök alapvető kérdéseinek, problémáinak fölvetését. A szerző által megfogalmazott kérdések az adott témák tanításával kapcsolatban előforduló problémákra hívják föl a figyelmet. A matematikát tanító olvasó kérdéskultúrája is sokat fejlődhet a könyv áttanulmányozása révén. A szerző a matematikatanítás legfontosabb komponenseit elemzi tizennyolc fejezetben (beszélgetés): a matematikatanítás céljai, tantervek, kompetenciák, matematikatanulás (tanulói tevékenységek), a tanítás kérdései (tanár tevékenysége), értékelés, ellenőrzés, tehetséggondozás, magyar hagyományok. Érdemes fölsorolni a fejezetek fő kérdéseit:

Miért tanítunk az iskolában matematikát?

Mit (is) lehet a matematikán szeretni?

Miért érdemes iskolába járni?

Mit tanítsunk?

Mi a szerepe az algoritmusok és a típusfeladatok tanításának?

Hogyan fejleszthetjük a különféle gondolkodásmódokat?

Kell-e különleges adottság ahhoz, hogy valaki értse a matematikát?

Mi a megértés szerepe a matematika tanulása során?

Hogyan „katalizálható" a tanuló fejlődése?

A matematikatanár

A tanár tervező munkája

Kell-e könyv a matematikatanításhoz?

Szükségünk van-e tanulói munkaeszközökre és demonstrációs eszközökre?

Mi a fejtörők, a tréfás feladatok, a trükkök és a játék tanítási értéke?

Miért értékelünk? Mit értékeljünk?

Mi az anyanyelv szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében?

Milyen is a „magyar" matematikatanítás?

Mi a matematikadidaktikai kutatások szerepe?

Minden fejezet első részében a releváns kérdések fölvetése és a lehetséges válaszok bemutatása szerepel sok konkrét példával. A második részben a vonatkozó hazai és nemzetközi matematikadidaktikai szakirodalomból közöl részleteket mondanivalója alátámasztására. A szerző sok olyan értékes anyaggal rendelkezik, melyek egyáltalán nem, vagy csak alig érhetők el Magyarországon. A fejezetek utolsó részében ellenőrző kérdések és feladatok formájában foglalja össze, emeli ki az adott témák lényegét, majd a felhasznált, illetve tanulmányozásra javasolt irodalommal zár minden esetben.

Mit nem vállal a szerző?

Matematikai munkákkal kapcsolatban a teljesség, a precizitás, a rendszer, a világos fogalmak, az állítások bizonyítása alapvetően fontosak. A matematikatanítással kapcsolatban nehéz megfelelni e kritériumoknak, könnyen doktrinává válhat a mondanivaló. A szerzőnek sikerült elkerülni az „így kell" típusú, normatív megfogalmazásokat. Célja az olvasó aktivizálása, bekapcsolása egy közös gondolkodási folyamatba. A kérdések a lényeget érintik, a reájuk adott válasz több esetben nem lezárt, továbbgondolkodásra serkent. Azért, hogy a szülőket és más érdeklődőket is elérhesse, lemondott a száraz, tényközlő, tudományos stílusról, nem föladva az igényességet.

A stílusról, felfogásról

Szakmai lektorként a kéziratot többször is átTanulmányoztam, még ezután is öröm volt újra olvasni a kész kötetet. A szerző stílusa könnyen érthető, világosan fogalmaz. Az egész munkán átsüt a humánum, az ember, a tanulók, tanárok, szülők tisztelete. Néhány idézet a szerző felfogásának, ars poetikájának illusztrálására. „Hadd fogalmazzak még élesebben! Hivatásának gyakorlása közben nem elsősorban tantárgyat, például matematikát tanít, hanem a rábízott tanulókat fejleszti, neveli – egyebek között a tantárgyak, például a matematika eszközeivel is." (221. oldal) Segítőkészsége nyilvánul meg akkor is, amikor a „nem akarom, hogy a tanárokat csepüld" mondattal hárítja el a kérdező egyoldalú tanárbírálatát. „....nagyon szeretek új dolgokat tanulni. A tanítás közben sokszor a tanulók gondolkodása nyomán is rengeteg minden megvilágosodik bennem. Az a szerencsés tanár, aki az újonnan tanultakat megoszthatja kollégáival, mert könnyebben erősödik meg benne is az új tudás." (258. oldal)

Kiknek ajánlom a könyvet?

1. Elsősorban a matematikát bármely szinten tanító kollégák forgathatják haszonnal. Az iskolai oktatás minden szintjéből hoz föl és elemez konkrét példákat, ezért az alsó tagozatos tanítóktól kezdve az általános iskolai matematikatanárokon át a középiskolai matematikatanárokig mindenki talál a könyvben sok hasznos, megvalósítható gondolatot. A legfontosabb következmény az lehet, hogy a gyakorló matematikatanárok végiggondolják saját tanításukat, reflektálnak arra, tudatosabban látják az egyes tanítási komponensek szerepét. Jó lenne, ha minden gyakorló matematikatanárnak meg lenne e könyv, mivel ezt nem elég egyszer elolvasni. Ennek a könyvnek, mint alapkönyvnek rendelkezésre kell állni bármely időszakban.

2. Fontosnak tartom e könyv használatát a főiskolai, egyetemi matematikai szakmódszertani kurzusokon. A könyvben tárgyalt témák, azok feldolgozási módja, szakirodalom-részletek, kérdések, feladatok jól felhasználhatók szemináriumokon, lehetőséget biztosítva az önálló hallgatói feldolgozásra is.

3. Az előző pontokból természetesen következik, hogy a felsőoktatásban dolgozó matematikadidaktikus (matematika szakmódszertanos) szakemberek számára alapvetően fontosnak tartom e munkát.

4. A pár éve a Debreceni Egyetemen beindult matematikadidaktikai doktori iskola (PhD) hallgatóinak szintén alapkönyve lehet e munka. Mielőtt bármely részterületet elkezdenek kutatni, alaposan át kell tanulmányozniuk e könyvet. A számukra különösen fontos minőségi kérdésfeltevések módját is megtanulhatják. A gazdag irodalmi illusztrációk pedig a saját kutatási témájuk releváns szakirodalmának meghatározásához adhatnak nagy segítséget.

5. A szerzővel egyetértve ajánlom a könyvet gyakorló szülőknek is. Áttanulmányozva a könyvet, talán eloszlik félelmük a matematikától, és gyerekükbe is bele tudják táplálni ezt az érzést. Másrészt képet kaphatnak arról is, hogy a matematikatanárok is érző, hús-vér emberek.

Összegzés

Szendrei Julianna egy alapos, átfogó, elgondolkoztató, továbbgondolkodásra késztető könyvvel ajándékozott meg bennünket a matematika tanításával kapcsolatban. Minden érdeklődőnek melegen ajánlom a Typotex Kiadó ezen 2005. évi kiadványát.

VITAINDÍTÓ

Dr. Előry Vilma

A tankönyvszöveg megértése

1. A szövegértés mint általános probléma

A szövegértés általában is központi kérdése a pedagógiának, vagy annak kellene lennie, a PISA-felmérés rossz eredményei óta azonban nemcsak központi kérdés, hanem kifejezetten neuralgikus pontnak tekinthető. Magáról a felmérésről csak annyit: érdemes lenne megvizsgálni, akár tudományosan is, mi a felmérés rossz eredményének közvetlen oka. Milyenek voltak az értelmezendő szövegek? Gondolom nem rosszak, és megfeleltek a korosztályi szintnek. A feltételezett jó szövegeket miért nem tudták kellőképpen értelmezni a diákok? Vagy mert nem voltak eléggé motiváltak, tehát nem érdekelte őket a szöveg, ill. a felmérés, vagy mert nem tudnak szöveget jól értelmezni. Az értelmezőkészség hiánya mire vezethető vissza? A koncentrálni tudás hiányára, ill. arra, hogy nem tanultak meg (eléggé) szöveget érteni. A szövegértés tanítása mint központi oktatási feladat iskolarendszerünkben túl korán fejeződik be, hiányzik a felső tagozatos és a középiskolai, majd a felsőoktatási programokból, de még inkább a gyakorlatból (hiszen a kommunikáció-központú oktatás elvben régóta szerepel) a beszéd-, fogalmazás- és értelmezéstanítás. A kifejezőkészség és a mások szövegének megértése szoros kapcsolatban van egymással: az ismeretszerzés és önkifejezés képességét alapozhatja meg, ezekkel együtt a társadalmi kommunikációban való részvételt és az egészséges önképet. A túlzottan ismeretcentrikus, a tanulók gondolkodásának fejlesztésére kevesebb figyelmet fordító, sokszor egyoldalú oktatás, amelyben a tanár beszél, a diák hallgat, és inkább írásban számol be tudásáról, létrehozhatja ezt a helyzetet. Súlyosbíthatja még, hogy a magyar nyelvi órák kevés alkalmát sem használják ki a pedagógusok, különösen középiskolában, és akkor is inkább „száraz" grammatikát tanítanak. Bizonyára az is rontja a helyzetet, hogy a nem magyar szakos tanárok a felsőoktatási intézményekben nem kapnak semmiféle nyelvi-nyelvhasználati képzést, s végképp nem tanulnak arról, hogy milyen legyen a tanórán a tanár és diák közötti kommunikáció. A felmérés lehangoló eredményének okát elsősorban tehát az oktatásstratégiai, ill. oktatás-módszertani területen kell keresni.

2. A tankönyvszöveg minősége

A tankönyv szövegének megértéséhez ugyanazoknak a feltételeknek a teljesedése szükséges, mint amelyeket az előzőekben felsoroltunk. Ha ezek hiányoznak, hiába tökéletes a tankönyv szövege, a diákok mégsem értik meg kellőképpen. Azt azonban joggal feltételezhetjük, hogy a bármilyen szempontból rossz tankönyvszöveg akadályozza, de legalábbis nehezíti a megértést és a tanulást (NB. érdemes lenne elgondolkodni azon, tanítunk-e tanulni).

De milyen a jó tankönyvszöveg? Kojanitz László meghatározása szerint az ismeretanyag mennyiségének és szövegezésének összhangban kell lennie „a tanítási célokkal, a tanulók előzetes ismereteivel, valamint szövegértési, gondolkodási és tanulási képességeivel" (Kojanitz László: A tankönyvek használhatóságát meghatározó minőségi összetevők elemzése és összehasonlí-

tása. www.om.hu). A tanítási célok, a tanulók előzetes ismeretei a szaktárgyi szakemberek területe, de vajon tudjuk-e, hogy milyenek valójában a tanulók szövegértési, gondolkodási és tanulási képességei? Szabad-e úgy tankönyvelemzést folytatnunk, hogy nem ismerjük, a tanulók milyen szövegértési képességekkel rendelkeznek, ill. milyennel kellene rendelkezniük?

2.1. A tankönyvszöveg-kutatás lehetséges stratégiái

Többféle lehetőség nyílik arra, hogy megalapozzuk a tankönyvek szövegének kutatását. Talán az lenne a leginkább járható út, hogy először felmérések készülnének arról, milyen a tanulók szövegértése, sőt, arról is, mi az, ami a legnagyobb nehézséget jelenti számukra. Az eredmények alapján aztán már érdemes lenne a meglevő tankönyvek szövegét vizsgálni, hiszen tudnánk, hogy milyen szempontokat nézzünk (pl. ne a mondathosszúságot, ha az nem jelent problémát), és a vizsgálati eredményeket lenne mivel összevetnünk. Az előzetes felmérés nélküli szövegvizsgálatok hasznossága nagyon alacsony szintű marad. Másik lehetőség az – de ezt csak akkor érdemes választani, ha a szövegértésoktatás már beépült az oktatási rendszerbe –, hogy megállapítjuk a megvalósult/megvalósítandó szövegértési átlagot, s ehhez mérjük a meglevő vagy létrehozandó tankönyvek szövegének minőségét. Bármelyik módszert választjuk (egyelőre inkább az elsőnek van realitása), a tankönyvszöveg-elemzések eredményei alapján lehet aztán tankönyvírás-módszertani javaslatokat tenni, esetleg követelményeket fölállítani.

2.2. A szövegelemzés módszertana

Az OM honlapján olvasható elemzések közül Kojanitz Lászlónak A tankönyvek használhatóságát meghatározó minőségi összetevők elemzése és összehasonlítása című munkája foglalkozik a tankönyvek szövegezésével is, e tanulmány vehető tehát figyelembe témánk szempontjából. Gondolatmenetemnek kiindulása éppen e munka módszereinek kritikája, ezután következnek a szövegtan eredményein alapuló módszertani javaslatok.

Kojanitz László a következő szempontok szerint vizsgálta a tankönyvek szövegezését (megjegyzem, egy angol szakmunka alapján): (1) a mondatok hosszúsága *n*-ben mérve, (2) a főnevek és az igék aránya. E szempontokhoz a következőket kell hozzáfűzni:

(1) A mondatok hosszúsága n-ben mérve igen kevés információval szolgál arról, hogy a mondat mennyire érthető. A jól szerkesztett igen hosszú, többszörösen összetett mondatok is lehetnek jól értelmezhetők. Vannak ugyanis a mondatnak a hosszúságnál meghatározóbb jellemzői is. A magyarban pl. az, hogy a szórend mennyire emeli ki a fontos, új közlést (melyik mondatrész hogyan helyezkedik el a fókuszpozícióhoz képest). Nem mindegy továbbá, hogy a mondatok milyen arányban tartalmaznak zsúfolt szerkezeteket (mélységükben vagy „szélességükben" milyen szerkesztettséget mutatnak). Az sem mellékes, hogy a többszörösen összetett mondatok mellé- vagy alárendelő kapcsolatban vannak-e egymással, ill. hogy ez a kapcsolatháló menynyire bonyolult stb. Miközben nem tagadhatjuk, hogy az n-ben mért hosszúságnak is lehetnek megértési vonatkozásai, a hosszúság önmagában, szerkezeti elemzések nélkül nagyon keveset mond.

(2) A főnevek és az igék aránya valóban jelezheti a elvontság-konkrétság viszonyát, de megint csak korlátozottan. Egy igéből képzett főnév hordoz még valamit az ige dinamizmusából, és pl. az igenevek dinamikusabbak, mint a hasonló mondattani szerepű melléknevek. A szöveg érthetőségének, tanulhatóságának vizsgálatában azonban még e kategóriák figyelembe vételével is csak elenyésző szerepet játszanak ezek a mutatók.

A tankönyvszöveg-elemzők figyelmét szeretném felhívni arra, hogy szövegelemzést nem lehet – még pedagógiai céllal sem, sőt, ez esetben különösen nem! – a tudományos szövegelemzési módszerek mellőzésével végezni. Sőt, mivel a szöveg nyelvspecifikus is, szükséges a magyar szövegekre vonatkozó kutatások eredményeit és módszereit figyelembe venni, különösen a spe-

ciálisan iskolai, köztük tankönyvszöveg-elemzési munkákat, mint pl. B. Fejes Katalin tanulmányait, elsősorban a 90-es évek második feléből.

Ezekből a figyelembe veendő szempontokból itt csak a legszükségesebbeket sorolom fel, hiszen az idevonatkozó szakirodalom összefoglalása e helyen lehetetlen. Ezenkívül egy tankönyvszöveg-vizsgálati szempontrendszer kidolgozása-összeállítása külön feladat lenne.

(1) Szövegtagolás és gondolati egységek: mennyire felel meg a szöveg tagolása (bekezdések, mondattömbök, mondathatárok) gondolati rendszerének?

(2) A mondategész kapcsolata a szövegegészszel: kapcsolódnak-e az egyes mondatok (tematikusan, izotópokkal) a szöveg egészéhez, szükséges-e minden mondat ahhoz, hogy a szövegegész közléstartalma világossá váljon?

(3) A mondategészek kapcsolódása egymással: van-e tartalmi-logikai és grammatikai kapcsolat a szomszédos mondatok között, vagy egymástól független közlésegységek követik egymást?

(4) Az összetett mondatok tagmondatainak (mondategységeinek) kapcsolódása: hogyan szinteződnek és tömbösödnek a mondategységek, milyen az esetleges közbeékelődések aránya, a mondategységek mellé- vagy alárendelők, a kapcsolódás jelölve van-e utalószóval, ill. kötőszóval, vagy jelöletlen?

(5) A mondategységek szerkezeti hiányossága: okoznak-e megértési zavart a szerkezeti hiányok, vagy várhatóan kitölthetők a szövegkörnyezetből, ill. a diákok tudásából, tulajdonképpen a kifejtettség (explicitás) és bennfoglalás (implicitás) kérdései?

(6) A szöveg aktuális tagolása: a fontos és kevésbé fontos, az új és ismert dolgok értelemtükröző szórendi helye. Az új (hangsúlyos) elemek valóban a fókusz előtti helyre kerülnek-e? Tükrözi-e tehát a szórend a közlő szándékát, érthető-e, „logikus-e" a mondatok egymásutánja (a témafejlődés mint a szöveg „logikájának" nyelvi mutatója)?

(7) A mondategységek szerkesztettsége: hogyan szinteződnek, ill. tömbösödnek a mondatok (mondategységek) szerkezeti egységei, a szintagmák? A szinteződés és tömbösödés milyen terjedelmű (mélységű, ill. szélességű)? Milyen a szerkezettagok kapcsolódásának minősége: mellé- vagy alárendelő, jelölve vannak-e a kapcsolatok kötőszóval, vagy anélkül állnak?

(8) Lexikai anyag: elsősorban a szakszavak típusainak és mennyiségének a vizsgálata, de sűrűségüket a tanuló tantárgyankénti befogadóképességéhez kell mérni, nem az egyes tantárgyak tankönyveinek adatait egymáshoz (az egyes tárgyaknak más a „szakszószükségletük", ill. szakszavaik különböző jellegűek lehetnek).

3. Összefoglalás

A tankönyvvizsgálatokban igénybe kell venni tehát a magyar szövegtan módszereit és szövegelemzési szempontjait. A tudomány egyes területei ugyanis legföljebb elméleti szinten különülnek el, a gyakorlati alkalmazás megköveteli a lehető legszélesebb elméleti tájékozottságot, s ez érvényes a tankönyvkutatásra is. Hangsúlyozandó még az is, hogy az elemzési szempontokból válogatni lehet ugyan, hiszen egy-egy elemzés mindent nem vizsgálhat. De tanácsos a fontosabb, több eredményt ígérő szempontokat előnyben részesíteni, s az egyes szempontok eredményeit egymással összefüggésbe hozni. Csak így várható ugyanis, hogy ne jelenjenek meg olyan hírek, hogy mostantól kezdve egy tankönyvi mondat nem lehet hosszabb száz betűnél, vagy hogy meg kellene szabni, egy mondatban hány szakszó lehet. Az ilyen vagy hasonló kijelentések leegyszerűsítik, formálissá teszik a valóságot, s csak azt nem veszik figyelembe, ami a valódi probléma.

A témával kapcsolatos észrevételeiket a következő e-mail címre várjuk: level@pedagogus.hu.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2006. január 31.

Feladatok (285–289.)

285. Tekintsük az összes tízes számrendszerben háromjegyű pozitív egész számot, és rendeljük hozzá mindegyikhez a szám és számjegyei négyzetösszegének különbségét. Határozzuk meg ezen különbség minimális, illetve maximális értékét.

Varga István, Békéscsaba

286. Az $ABCD$ tetraéder AD, BD és CD élei páronként merőlegesek egymásra. Jelölje R_1 az ABC háromszög köré írt körnek, R_2 pedig a tetraéder köré írt gömbnek a sugarát. Igazoljuk, hogy $1 < \frac{R_2}{R_1} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Varga István, Békéscsaba

287. Mely rácspontokon halad át a derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + x + y = 2006$ egyenletű kör?

Varga István, Békéscsaba

288. Határozzuk meg az összes olyan egész együtthatós $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ polinomot, amelynek gyökei a_0, a_1, ..., a_{n-1}!

289. Jelölje A_n az összes olyan 0 és 1 számjegyekből álló n hosszúságú sorozatok számát, amelyekben nincs „0101" rész. Határozzuk meg az A_{2005} paritását!

Feladatmegoldások (270–274. feladatok)

270. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalak hossza pozitív egész szám, és az átfogó hossza 2005?

Varga István, Békéscsaba

Megoldás: Ismert, hogy ha a és b egy derékszögű háromszög befogói, c az átfogója, akkor $a^2 + b^2 = c^2$. Ismert az is, hogy ha az a, b, c pozitív egészek, akkor

$$a = p(m^2 - n^2),\ b = p(2mn),\ c = p(m^2 + n^2),$$

ahol $(m; n) = 1$, $m > n$, mn páros és p pozitív egész szám.

Most $c = 2005 = 5 \cdot 401 = p(m^2 + n^2)$, ezért p lehetséges értékei: 1, 5, 401, 2005.

1. eset: Ha $p = 1$, akkor $m^2 + n^2 = 2005$. Ennek megoldásai: $m_1 = 39$, $n_1 = 22$ vagy $m_2 = 41$, $n_2 = 18$. Ezekkel az értékekkel: $a_1 = 1037$, $b_1 = 1716$ vagy $a_2 = 1357$, $b_2 = 1476$.

2. eset: Ha $p = 5$, akkor $m^2 + n^2 = 401$. Ennek az egyenletnek csak az $m = 20$, $n = 1$ a megfelelő megoldása. Ekkor $a = 1995$, $b = 200$.

3. eset: Ha $p = 401$, akkor $m^2 + n^2 = 5$. A megfelelő megoldás: $m = 2$, $n = 1$.
Innen $a = 1203$, $b = 1604$.

4. eset: Ha $p = 2005$, akkor $m^2 + n^2 = 1$, aminek nincs pozitív egész megoldása.

Összefoglalva: Kaptuk, hogy 4 megfelelő derékszögű háromszög van, ezeknek a befogói:

a	b
1037	1716
1203	1604
1357	1476
1995	200

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 15.

271. Az $x^3 - (p-61)x^2 + (p+44)x - 216 = 0$ egyenletben válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökei egy mértani sorozat egymást követő tagjai legyenek.

Fitos László, Esztergom

Megoldás: Legyenek a megfelelő gyökök $x_1 = a$, $x_2 = aq$, $x_3 = aq^2$. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$a(1 + q + q^2) = p - 61, \quad (1)$$

$$a^2q(1 + q + q^2) = p + 44, \quad (2)$$

$$a^3q^3 = 216. \quad (3)$$

(3)-ból $aq = 6$. Ezt (2)-be helyettesítve, és (1)-et figyelembe véve p-re a következő egyenlet adódik: $6 \cdot (p - 61) = p + 44$. Innen $p = 82$.
p értékét visszahelyettesítve kapjuk, hogy $q = 2$ vagy $q = \frac{1}{2}$, a megfelelő a értékek 3, illetve 12, az egyenlet gyökei pedig 3, 6, 12.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 16.

272. Határozzuk meg az adott $ABCD$ téglalap belsejében azon P pontoknak a halmazát, amelyekre $APB\sphericalangle + CPD\sphericalangle = 180°$!

Kiss Zoltán, Pécs

Megoldás: Helyezzük el a téglalapot a derékszögű koordináta-rendszerben, a csúcsok legyenek $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; b)$, $D(0; b)$. Jelölje a keresett ponthalmaz egy tetszőleges pontját $P(x; y)$. Tükrözzük P-t a téglalap oldalegyeneseire: AB-re vonatkozó tükörkép E, BC-re vonatkozó F, CD-re vonatkozó G, DA-ra vonatkozó pedig H.
A feltétel alapján az $EFGH$ négyszög húrnégyszög. P-nek a köré írt körre vonatkozó hatványa: $EP \cdot PG = HP \cdot PF$, azaz $2x \cdot 2(a - x) = 2y \cdot 2(b - y)$. Ebből

$$(x^2 - ax) - (y^2 - by) = 0,$$

ahonnan

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

Ez egy olyan hiperbolának az egyenlete, amelynek szimmetriaközéppontja a téglalap középpontja, tengelyei párhuzamosak a téglalap oldalaival, fél valós és fél képzetes tengelyének hossza pedig egyaránt $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$.
A keresett ponthalmaz tehát a fenti hiperbolának a téglalap belsejébe eső része.

Varga Éva, Kecskemét

A megoldók száma: 8.

273. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenletet:

$$a^3 + 12a + b^6 = 6a^2 + 7c + 4.$$

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: A megoldandó egyenlet a következő alakra hozható:

$$(a - 2)^3 + (b^6 - 1) = 7(c - 1) + 2.$$

A jobb oldal 7-es maradéka 2. Vizsgáljuk meg a bal oldal 7-es maradékát. $(a - 2)^3$ 7-es maradéka lehet 0, 1, 6. $b^6 - 1$ 7-es maradéka lehet 0, 6.
Az egyenlet két oldalának 7-es maradéka nem egyezik meg, ezért nincs egész megoldás.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 13.

274. Jelölje S_n egy mértani sorozat első n elemének összegét. Van-e olyan pozitív egész k szám, hogy S_{n-k}, S_n, S_{n+k} egy mértani sorozat három egymást követő eleme?

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A feladatnak csak akkor van értelme, ha $k < n$.

Jelölje az eredeti mértani sorozat első elemét a, hányadosát q ($q \neq 0$). Ha $a = 0$, akkor a sorozat a konstans 0 sorozat, ekkor bármely $k < n$ megfelel. A továbbiakban feltesszük, hogy $a \neq 0$. Külön vizsgáljuk a $q = 1$ és a $q \neq 1$ esetet.

1. eset: Ha $q = 1$, akkor $S_n = na$. A feltétel szerint

$$\frac{S_n}{S_{n-k}} = \frac{S_{n+k}}{S_n}.$$

Ebből $k = 0$ adódik, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben nincs megoldás.

2. eset: Ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$. Ezt a feltételbe helyettesítve, az egyszerűsítéseket elvégezve, valamint a nevezőkkel beszorozva kapjuk, hogy

$$(q^n - 1)^2 = (q^{n-k} - 1)(q^{n+k} - 1).$$

A műveletek elvégzése, 0-ra rendezés és q^{n-k}-val osztás után

$$q^{2k} - 2q^k + 1 = 0.$$

Innen $q^k = 1$, ami a valós számok körében az 1. eset figyelembevételével azt jelenti, hogy $q = -1$, és k páros ($3 \leq n$, $k < n$).

A feladat nem adta feltételként, hogy valós tagokból álló mértani sorozatra szorítkozzunk, ezért megoldást kapunk akkor is, ha $k \geq 2$ esetén $q = \cos\frac{2l\pi}{k} + i\sin\frac{2l\pi}{k}$ ($l \in \{1; 2; \ldots; k-1\}$).

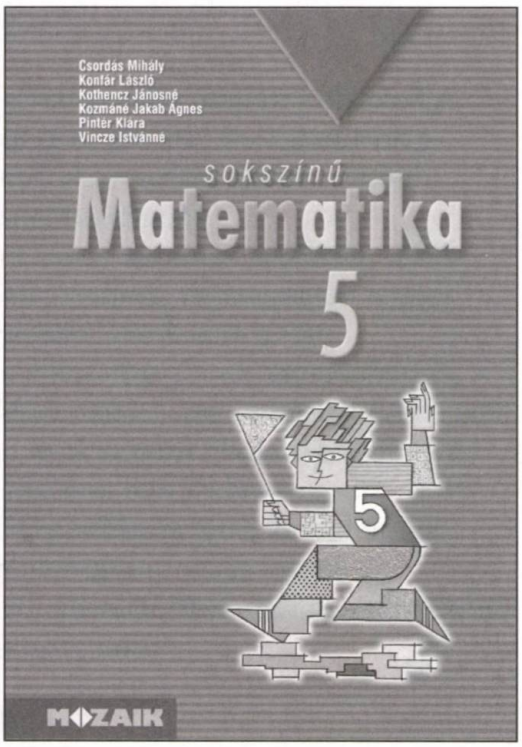
Molnár István, Gyula
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely
Varga István, Békéscsaba

Megjegyzés: A rovatvezető jó megoldásnak fogadta el azt is, ha a megoldás csak valós mértani sorozatokra vonatkozott.

A megoldók száma: 13.

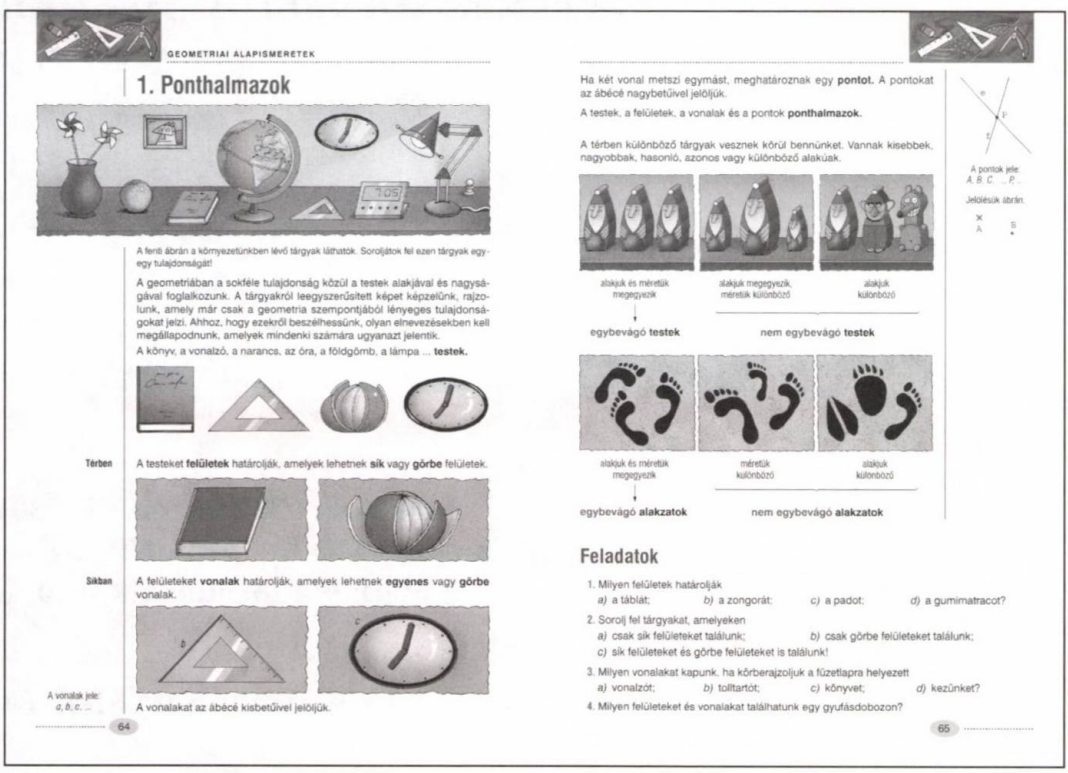
A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (270., 271., 273., 274.); Dályay Pál Péter, Szeged (270–274.); Fitos László, Esztergom (270., 271.); Kamarás Lajos, Pécs (270–274.); Kiss Zoltán, Pécs (270., 271., 273., 274.); Márkus Erika, Kecskemét (270–273.); Mészáros József, Jóka (270., 271., 273., 274.); Molnár István, Gyula (270–274.); Rakonczai György, Budapest (270–274.); Szoldatics József, Kapuvár (270., 271., 272. 2 mód, 273., 274.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (270–274.); Varga Éva, Kecskemét (271., 272.); Varga István, Békéscsaba (270., 271., 273., 274.); Varga Nóra, Sarkad (270., 271.); Zachar Zoltán, Tatabánya (270–274.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (270–274.).

Sokszínű matematika 5. osztály



Megjelent a Sokszínű matematika tankönyvcsalád 5. osztályos kötete. A sorozat alsó tagozatos és középiskolás kötetei már több rangos tankönyvdíjat nyertek, s az utóbbiak mára piacvezetővé váltak. Az 1–12. évfolyamot átfogó sorozat gyermekközeli, játékos és gyakorlatias módon tartalmazza a kerettantervnek megfelelő tananyagot. Az egyes témák az életből vett matematikai problémák felvetésével indulnak, amelyek megoldása során a tanuló szinte önállóan fogalmazhatja meg az új ismereteket, szabályokat.

A matematikai „felfedeztetés" és a fogalmak kialakítása a tanulók gyakorlati tapasztalataiból indul ki. Minden fejezetben szerepelnek a logikus gondolkodást és a kombinatorikus szemléletmódot gyakoroltató feladatok. Kiemelt hangsúlyt kap a térszemlélet fejlesztése, amely az általános iskolai anyagból eddig teljesen hiányzott. Rendszeresek a statisztikus és a helyes becslés képességét fejlesztő feladatok. A logikusan felépülő tananyag megértését, rögzítését színes magyarázó ábrák és szövegkiemelések segítik.


GEOMETRIAI ALAPISMERETEK

1. Ponthalmazok

A fenti ábrán a környezetünkben lévő tárgyak láthatók. Soroljátok fel ezen tárgyak egy-egy tulajdonságát!

A geometriában a sokféle tulajdonság közül a testek alakjával és nagyságával foglalkozunk. A tárgyakról leegyszerűsített képet képzelünk, rajzolunk, amely már csak a geometria szempontjából lényeges tulajdonságokat jelzi. Ahhoz, hogy ezekről beszélhessünk, olyan elnevezésekben kell megállapodnunk, amelyek mindenki számára ugyanazt jelentik.

A könyv, a vonalzó, a narancs, az óra, a földgömb, a lámpa ... **testek.**

Térben A testeket **felületek** határolják, amelyek lehetnek **sík** vagy **görbe** felületek.

Síkban A felületeket **vonalak** határolják, amelyek lehetnek **egyenes** vagy **görbe** vonalak.

A vonalak jele: *a, b, c, ...*

A vonalakat az ábécé kisbetűivel jelöljük.

64

Ha két vonal metszi egymást, meghatároznak egy **pontot.** A pontokat az ábécé nagybetűivel jelöljük.

A testek, a felületek, a vonalak és a pontok **ponthalmazok.**

A térben különböző tárgyak vesznek körül bennünket. Vannak kisebbek, nagyobbak, hasonló, azonos vagy különböző alakúak.

alakjuk és méretük megegyezik | alakjuk megegyezik, méretük különböző | alakjuk különböző

egybevágó **testek** | nem egybevágó **testek**

alakjuk és méretük megegyezik | méretük különböző | alakjuk különböző

egybevágó **alakzatok** | nem egybevágó **alakzatok**

A pontok jele: *A, B, C, ... P, ...*

Jelölésük ábrán.

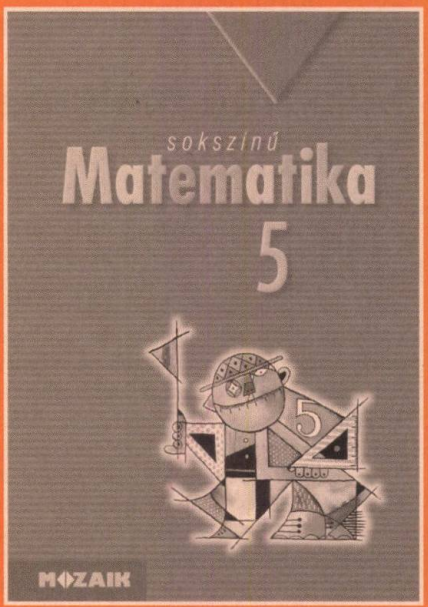
Feladatok

1. Milyen felületek határolják
   a) a táblát; *b)* a zongorát; *c)* a padot; *d)* a gumimatracot?
2. Soroljatok fel tárgyakat, amelyeken
   a) csak sík felületeket találunk; *b)* csak görbe felületeket találunk;
   c) sík felületeket és görbe felületeket is találunk!
3. Milyen vonalakat kapunk, ha körberajzoljuk a füzetlapra helyezett
   a) vonalzót; *b)* tolltartót; *c)* könyvet; *d)* kezünket?
4. Milyen felületeket és vonalakat találhatunk egy gyufásdobozon?

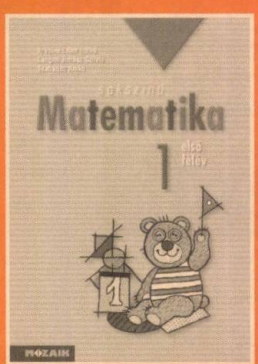
65

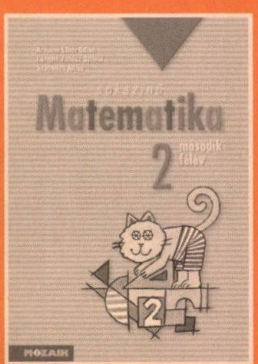
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD 1–12. OSZTÁLYOSOKNAK

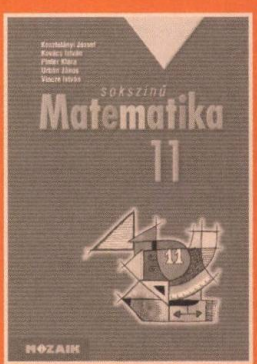
A Sokszínű matematika tankönyvcsalád gyermekközeli, játékos és gyakorlatias módon tartalmazza a kerettantervnek megfelelő tananyagot.
Az 5. osztályos tankönyv arra törekszik, hogy a matematikai gondolkodást minél változatosabban fejlessze. Ezért a „felfedeztetés" és a fogalmak kialakítása a tanulók gyakorlati tapasztalataiból indul ki.
Minden fejezetben szerepelnek a logikus gondolkodást és a kombinatorikus szemléletmódot gyakoroltató feladatok.
A könyv és a munkafüzet nemcsak tartalmában, hanem felépítésében is nagyon színes, szemléletes.

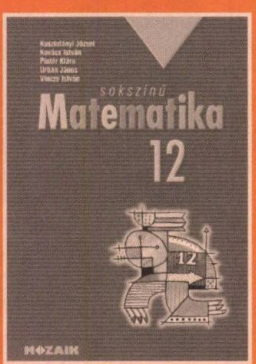


A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK
www.mozaik.info.hu